UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Session de rattrapage
Année 2010/2011
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2011

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X+1}{X^3(X^2+X+1)^2}$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,-1,2),(-1,-1,0),(3,-5,8),(1,-5,6))$$

1 Justifier que le rang de $\mathscr{S}$ est 2

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus (On ne demande pas de calculer toutes les décompositions possibles).

III On rappel que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois $f+g\ : x \longrightarrow f(x)+g(x)$ et $\lambda f\ : x \longrightarrow \lambda f(x)$. On pose E le sous ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des applications $f\ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2 Soit $\varphi\ : E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(f) = (f(0), f(1))$ pour tout $f \in E$.

- i. Montrer que φ est linéaire.
- ii. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, montrer que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- iii. En déduire que φ est injective.
- iv. Soit $\overline{\varphi}\ : E \longrightarrow Im(\varphi)$ l'application définie par $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Montrer que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- v. En déduire que $\dim(E) \leq 2$.

3 On considère les applications $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ données par $g(n) = 1$ et $h(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- i. Montrer que g et h appartiennent à E.
- ii. Montrer que le système $((g(0), g(1)), (h(0), h(1)))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$.
- iii. En déduire que le système (g, h) est libre dans E.

iv. Montrer que $\dim(E) = 2$.

4 Montrer que pour tout $f \in E$ ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tel que $f = \alpha g + \beta h$

5 Montrer que pour tout $f \in E$ on a $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = f(0) + (f(1) - f(0))n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ et sur $\mathbb{R}$ le determinant d'ordre n

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \vdots \\ \dots & & & & & & \ddots & 0 \\ \dots & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ on a $\delta_{n+2} = 2\delta_{n+1} - \delta_n$

7 Soit $f \; : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(n) = \delta_{n+1}$

i. Montrer que $f \in E$

ii. En utilisant 5. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \delta_n = n + 1$

IV Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X-1)^2(X-2)$

2 Donner les valeurs propres de A

3 Donner les vecteurs propres de A

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. On suppose que $f \circ g = 0$

1 Montrer que $Im(g) \subset ker(f)$

2 En déduire que $dim(Im(g)) + dim(Im(f)) \leq dim(E)$

Dans la suite, on suppose de plus que $f + g$ est bijectif

3 Montrer que $\forall y \in E \qquad \exists x \in E \qquad y = f(x) + g(x)$

4 En déduire que $E = Im(f) + Im(g)$

5 Montrer que $dim(E) = dim(Im(g)) + dim(Im(f))$

6 Montrer que $Im(f) + Im(g)$ est directe

7 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$

8 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $x \equiv x_1 \quad mod\ (ker(f))$ et $x \equiv x_2 \quad mod\ (ker(g))$