UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Session de rattrapage
Année 2010/2011
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2011

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

solution

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X+1}{X^3(X^2+X+1)^2}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d+eX}{1+X+X^2} + \frac{f+gX}{(1+X+X^2)^2}$$

- Q reste de la division euclidiènne de $X+1$ par $X^3(X^2+X+1)^2 \longrightarrow Q = 0$
- Pour calculer a, b, c on pose $h = X$ et on effectue un développement limité à l'ordre 2 de h^3F

$$h^3F = \frac{1+X}{(1+X+X^2)^2} \quad \Big|_{X=h} = \frac{1+h}{(1+h+h^2)^2}$$

$$= \frac{1+h}{1+h^2+2h+2h^2} = \frac{1+h}{1+2h+3h^2}$$

$$\begin{array}{c|c} 1+h & 1+2h+3h^2 \\ \cline{2-2} 1+2h+3h^2 & 1-h-h^2 \\ \cline{1-1} -h-3h^2 & \\ -h-2h^2 & \\ \cline{1-1} -h^2 & \end{array}$$

par suite

$$F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \dots$$

- Pour calculer d, e, f, g on pose $h = 1+X+X^2$ et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de $h^2F \quad \Big|_{X^2=h-1-X}$

$$h^2F = \frac{1+X}{X^3} = \frac{1+X}{X(h-X-1)} = \frac{1+X}{Xh-(X^2+X)}$$

$$= \frac{1+X}{Xh-(h-1)} = \frac{1+X}{(X-1)h+1} \qquad (*)$$

$$= \frac{(1+X)((-1-X)-1)h+1)}{((X-1)h+1)(((-1-X)-1)h+1)}$$

$$= \frac{(1+X)(1-(2+X)h)}{((X-1)h+1)(1-(2+X)h)} = \frac{1+X-(X^2+3X+2)h}{1-3h+O(h^2)}$$

$$= \frac{1+X-(h+2X+1)h}{1-3h+O(h^2)} = \frac{1+X-(2X+1)h+O(h^2)}{1-3h+O(h^2)}$$

$$\begin{array}{c|c} 1+X-(1+2X)h & 1-3h \\ \underline{X+1-3(X+1)h} & \overline{X+1+(X+2)h} \\ (X+2)h & \end{array}$$

par suite

$$F = \frac{X+1}{(1+X+X^2)^2} + \frac{X+2}{1+X+X^2} + \dots$$

Remarque : On peut aussi faire directemement la division suivant les puissances croissante de h, <u>avec retenue</u> dans (*), le pivot est $1/1 = 1 \qquad mod(h)$

$$\begin{array}{c|c} 1+X & 1+(X-1)h \\ 1+X+(X^2-1)h & \\ =1+X+(h-X-2)h & \\ \underline{=1+X-(X+2)h} & 1+X+(X+2)h \\ (X+2)h & \end{array}$$

Autre méthode pour calculer d, e, f, g par l'identité de Besout, on cherche U tel que $UX^3 = 1+V(X^2+X+1) \longrightarrow U = 1$ alors $f+gX$ est le reste de $(X+1)U$ par $h \longrightarrow f+gX = 1+X$, on a $(1+X) - X^3(f+gX) = (1+X)(1-X)h$, alors $d+eX$ est le reste $(1+X)(1-X)$ par $h \longrightarrow d+eX = 2+X$

Finalement

$$F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{X+1}{(1+X+X^2)^2} + \frac{X+2}{1+X+X^2}$$

Autre méthode pour calculer a, b, c, d, e, f, g par identification de :

$$X+1 = X^3(X^2+X+1)^2 F \qquad \square$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,-1,2),(-1,-1,0),(3,-5,8),(1,-5,6))$$

1 Justifier que le rang de $\mathscr{S}$ est 2

Réponse : On résoud le système

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v4 = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_3 - x_4 \qquad (*)(1) \\ -(x_2 - 3x_3 - x_4) - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2(x_2 - 3x_3 - x_4) + 8x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (*)(1) \\ -2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \qquad (*)(2) \end{cases}$$

2 inconnues éliminées $\longrightarrow$ le rang $= 2$ $\quad \square$

Autre méthode : (v_1, v_2) est libre car $1/-1 \neq -1/-1$. Donc le rang est aumoin 2, on a (calcul) $)v_3 = 4v_1 + v_2$ et $v_4 = 3v_1 + 2v_2$ donc le rang $=2$ $\quad \square$

Autre méthode : On applique l'algorithme de complétition à savoir (rappel) : E espace vectoriel, $L \subset E$ libre , $G \subset E$ générateur :

i. Si $G = \emptyset$ terminer L est une base
ii. Soit $x \in G$, $G = G \setminus \{x\}$
iii. Si $x \notin vec(L)$ alors $L = L \cup \{x\}$
iv. Aller à i.

Ici $E = vect(\mathscr{S})$, $L = \emptyset$ et $G = \mathscr{S}$

i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_1 \longrightarrow G = (v_2, v_3, v_4)$
iii. $x \notin vect(L) = \{0\} \longrightarrow L = (v_1)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_2 \longrightarrow G = (v_3, v_4)$
iii. $x \notin vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_3 \longrightarrow G = (v_4)$
iii. $x \in vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_4 \longrightarrow G = \emptyset$
iii. $x \in vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G = \emptyset \longrightarrow L = (v_1, v_2)$ est une base $\square$

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rang = 2 \qquad \square$$

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

Réponse : Par la première méthode x_1, x_2 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2)$ base. Par la deuxième et la trisième méthode aussi (v_1, v_2) base. $\square$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus (On ne demande pas de calculer toutes les décompositions possibles).

Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(-4x_3 - 3x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{array}{cccc} & & -v_3 & -v_4 \\ x_1 & = & -4x_3 & -3x_4 \\ x_2 & = - & -x_3 & -2x_4, \end{array}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_3 = 4v_1 + v_2 \qquad v_4 = 3v_1 + 2v_2$ $\square$

Autre possibilitées :

$$(v_1, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -4v_1 + v_3 \\ v_4 = -5v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

$$(v_1, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -\dfrac{3}{2}v_1 + \dfrac{1}{2}v_4 \\ \\ v_3 = \dfrac{5}{2}v_1 + \dfrac{1}{2}v_4 \end{cases}$$

$$(v_2, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\dfrac{1}{4}v_2 + \dfrac{1}{4}v_3 \\ \\ v_4 = \dfrac{5}{4}v_2 + \dfrac{3}{4}v_3 \end{cases}$$

$$(v_2, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\dfrac{2}{3}v_2 + \dfrac{1}{3}v_4 \\ \\ v_3 = \dfrac{-5}{3}v_2 + \dfrac{4}{3}v_4 \end{cases}$$

$$(v_3, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{2}{5}v_3 - \dfrac{1}{5}v_4 \\ \\ v_2 = -\dfrac{3}{5}v_3 + \dfrac{4}{5}v_4 \qquad \square \end{cases}$$

III On rappel que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois $f + g \ : x \longrightarrow f(x) + g(x)$ et $\lambda f \ : x \longrightarrow \lambda f(x)$. On pose E le sous ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des applications $f \ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Réponse :

- La fonction définie par $\theta(n) = 0$ pour tout n vérifie bien $\theta(n+2) = 0 = 2.0 - 0 = 2\theta(n+1) - \theta(n)$, donc $\theta \in E$, donc $E \neq \emptyset$
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in K$, on a pour tout n $(f + \lambda g)(n+2) = f(n+2) + \lambda g(n+2) = (2f(n+1) - f(n)) + \lambda(2g(n+1) - g(n)) = 2(f(n+1) + \lambda g(n+1)) - (f(n) + \lambda g(n)) = 2(f + \lambda g)(n+1) - (f + \lambda g)(n)$, donc $f + \lambda g \in E$ $\square$

2 Soit $\varphi \ : E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(f) = (f(0), f(1))$ pour tout $f \in E$.

i. Montrer que φ est linéaire.
Réponse : Si $f, g \in E$ et $\lambda \in K$ on a $\varphi(f + \lambda g) = ((f + \lambda g)(0), (f + \lambda g)(1)) = (f(0) + \lambda g(0), f(1) + \lambda g(1)) = (f(0), f(1)) + \lambda(g(0), g(1)) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$ $\square$

ii. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, montrer que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Réponse : Récurrence sur n, supposons la propriètè vrai pour tout entier $< n$, si $n = 0$ ou $n = 1$ la propriètè est vrai sinon $n \geq 2$ et on a $f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) = 2.0 - 0 = 0$ $\square$

iii. En déduire que φ est injective.
Réponse : Soit $f \in ker(\varphi)$, donc $\varphi(f) = 0$, soit $(f(0), f(1)) = (0, 0)$, soit $f(0) = f(1) = 0$, d'après la question précédente $f(n) = 0$ pour tout n, donc $f = 0$, soit $ker(\varphi) = \{0\}$, donc φ est injective $\square$

iv. Soit $\overline{\varphi} : E \longrightarrow Im(\varphi)$ l'application définie par $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Montrer que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
Réponse :

- $\overline{\varphi}$ est surjective car si $y \in Im(\varphi)$ il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$ donc $y = \overline{\varphi}(x)$
- $\overline{\varphi}$ est injective car si $f \in ker(\overline{\varphi})$ on a $\overline{\varphi}(f) = 0$, donc $\varphi(f) = 0$, donc $f = 0$
- $\overline{\varphi}$ est linéaire car φ est linéaire $\square$

v. En déduire que $\dim(E) \leq 2$.
Réponse : On a $Im(\varphi)$ sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc $Im(\varphi)$ de dimension finie ≤ 2. Comme E est isomorphe à $Im(\varphi)$, alors E est de dimension finie ≤ 2 aussi $\square$

3 On considère les applications $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ données par $g(n) = 1$ et $h(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que g et h appartiennent à E.
Réponse : On a $g(n+2) = 1 = 2.1 - 1 = 2g(n+1) - g(n)$ et $h(n+2) = n + 2 = 2(n+1) - n = 2h(n+1) - h(n)$ $\square$

ii. Montrer que le système $((g(0), g(1)), (h(0), h(1)))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$.
Réponse : $((g(0), g(1)), (h(0), h(1))) = ((1, 1), (0, 1))$ et $1/0 \neq 1/1$ $\square$

iii. En déduire que le système (g, h) est libre dans E.
Réponse : Une relation $\alpha g + \beta h = 0$ entraine $\alpha g(0) + \beta h(0) = 0$ et $\alpha g(1) + \beta h(1) = 0$ donc $\alpha(g(0), g(1)) + \beta(h(0), h(1)) = (0, 0)$ par la question précédente $\alpha = \beta = 0$ $\square$

iv. Montrer que $\dim(E) = 2$.
Réponse : Comme (g, h) est libre, $dim(E) \geq 2$, par la question 2 on a $dim(E) \leq 2$, donc $dim(E) = 2$ $\square$

4 Montrer que pour tout $f \in E$ ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tel que $f = \alpha g + \beta h$
Réponse : Comme (g, h) est libre et $dim(E) = 2$, (g, h) est une base de E $\square$

5 Montrer que pour tout $f \in E$ on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f(0) + (f(1) - f(0))n$
Réponse : On a $f = \alpha g + \beta h \longrightarrow f(0) = \alpha, f(1) = \alpha + \beta \longrightarrow \alpha = f(0)\ et\ \beta = f(1) - f(0)$ $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ et sur $\mathbb{R}$ le determinant d'ordre n

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \vdots \\ \dots & & & & & & \ddots & 0 \\ \dots & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ on a $\delta_{n+2} = 2\delta_{n+1} - \delta_n$

Réponse : On développe par rapport à la première colonne $\square$

7 Soit $f\ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(n) = \delta_{n+1}$

i. Montrer que $f \in E$

Réponse : $f(n+2) = \delta_{n+3} = 2\delta_{n+2} - \delta_{n+1} = 2f(n+1) - f(n)$ $\square$

ii. En utilisant 5. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \delta_n = n+1$

Réponse : On a $\delta_n = f(n-1) = f(0) + (f(1)) - f(0)(n-1) = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)(n-1) = 2 + (3-2)(n-1) = n+1$ $\square$

IV Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X-1)^2(X-2)$

Réponse :

$$P_A = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(1-X) \qquad \square$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse : $sp(A) = \{1, 2\}$ $\square$

3 Donner les vecteurs propres de A

$$(x,y,z) \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \longrightarrow E_1 = \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = vect((1,0,0),(0,0,1))$$

$$(x,y,z) \in E_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \longrightarrow E_1 = \{0,z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = vect((0,1,1)) \qquad \square$$

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).

Réponse : A est diagonalisable car P_A est scindé et pour toute valeur propre multiple λ de A on a $dim(E_\lambda) = m_\lambda$ $\square$

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. On suppose que $f \circ g = 0$

1 Montrer que $Im(g) \subset ker(f)$

Réponse : Soit $y \in Im(g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, donc $f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = 0$, donc $y \in ker(f)$ $\square$

2 En déduire que $dim(Im(g)) + dim(Im(f)) \leq dim(E)$

Réponse : On a $Im(g) \subset ker(f)$, donc $dim(Im(g)) \leq dim(ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f))$, donc $dim(Im(g)) + dim(Im(f)) \leq dim(E)$ $\square$

Dans la suite, on suppose de plus que $f + g$ est bijectif

3 Montrer que $\forall y \in E \quad \exists x \in E \quad y = f(x) + g(x)$

Réponse : $f + g$ bijectif entraine (équivaut en fait à) $f + g$ surjectif $\square$

4 En déduire que $E = Im(f) + Im(g)$

Réponse : Par la question précédente $E \subset Im(f) + Im(g)$ donc $E = Im(f) + Im(g)$ $\square$

5 Montrer que $dim(E) = dim(Im(g)) + dim(Im(f))$

Réponse : On a $E = Im(f) + Im(g)$ donc $dim(E) = dim(Im(f) + Im(g)) \leq dim(Im(f)) + dim(Im(g))$, avec la question 2 on a l'inégalité inverse, donc $dim(E) = dim(Im(g)) + dim(Im(f))$ $\square$

6 Montrer que $Im(f) + Im(g)$ est directe

Réponse : On a $dim(Im(f) + Im(g)) = dim(Im(f)) + dim(Im(g))$, comme $Im(f) + Im(g)$ de dimension finie, $Im(f) + Im(g)$ est directe $\square$

7 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$

Réponse : Posons $y = f(x_1) + g(x_2)$ par la question 3, il exise $x \in E$ tel que $y = f(x) + g(x)$, soit $f(x_1) + g(x_2) = f(x) + g(x)$, comme $Im(f) + Im(g)$ est directe, on a $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$ $\square$

8 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $x \equiv x_1 \quad mod\ (ker(f))$ et $x \equiv x_2 \quad mod\ (ker(g))$

Réponse : $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$ équivaut à $f(x - x_1) = 0$ et $g(x - x_2) = 0$, donc à $x - x_1 \in ker(f)$ et $x - x_2 \in ker(g)$ $\square$