UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2009/2010
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2010

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

Solution

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^5+1}{X(X^2+1)^2}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X} + \frac{b+cX}{X^2+1} + \frac{d+eX}{(X^2+1)^2}$$

Q quotient de la division euclidiènne de X^5+1 par $X(X^2+1)^2 = X^5+\ldots$, soit

$$Q = 1$$

$$a = XF|_{X=0} = 1$$

On pose $h = X^2+1 \longrightarrow$

$$h^2F = \frac{X^5+1}{X} = \frac{X(h-1)^2+1}{X} = \frac{X(-2h+1)+1+O(h^2)}{X}$$

$$h^2F = \frac{X^2(-h+1)+X+O(h^2)}{X^2} = \frac{(h-1)(-2h+1)+X+O(h^2)}{h-1} = \frac{3h-1+X+O(h^2)}{h-1}$$

$$\begin{array}{c|c} X-1+3h & -1+h \\ \cline{2-2} X-1+(1-X)h & 1-X-(2+X)h \\ \cline{1-1} (2+X)h & \\ \ldots & \end{array}$$

D'où

$$F = \frac{1-X}{h^2} - \frac{X+2}{h} + \dots$$

Donc

$$F = 1 + \frac{1}{X} + \frac{1-X}{(X^2+1)^2} - \frac{X+2}{X^2+1}$$

Autre méthode : (Par l'identité de Besout)

On cherche $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que $UX + V(X^2+1) = 1 \longrightarrow U = -X$ et $V = 1$, écrivons

$$F = \frac{b+cX}{X^2+1} + \frac{d+eX}{(X^2+1)^2} + \dots$$

On a $(X^2+1)^2 F = A/Q \quad A = X^5+1 \quad Q = X$. Alors $d+eX$ reste de $UA = U(X^5+1) = -X^6 - X$ par $X^2+1 \longrightarrow d+eX = 1-X$

On a $A-(d+eX)Q = X^5+1-(d+eX)X = (X^2+1)(X^3-X+1) = (X^2+1)A_2 \longrightarrow$ $b+cX =$ reste de $UA_2 = U(X^3-X+1) = -X^4+X^2-X$ par $X^2+1 \longrightarrow b+cX =$ $-X-2$ $\square$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,1,-1),(1,0,1),(3,2,-1),(3,1,1))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

Réponse : Méthode 1 : On resoud le système linéaire :

$$x_1(1,1,-1) + x_2(1,0,1) + x_3(3,2,-1) + x_4(3,1,1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 \qquad * (1) \\ (-x_2 - 3x_3 - 3x_4) + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -(-x_2 - 3x_3 - 3x_4) + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 \qquad * (1) \\ -x_2 - x_3 - 2x_4) = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 \qquad * (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \qquad * (2) \\ 2(-x_3 - 2x_4) + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 \qquad * (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \qquad * (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Deux inconnues éliminées $\longrightarrow rang(\mathscr{S}) = 2$

x_1, x_2 inconnues éliminées $\longrightarrow ((1,1,-1),(1,0,1))$ base de $vect(\mathscr{S})$

$$S = \{(-2x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \; [\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{cccc} & & -v_3 & -v_4 \\ x_1 & = - & -2x_3 & -x_4 \\ x_2 & = & -x_3 & -2x_4 \end{array}$$

En lisant verticalement ce tableau $\longrightarrow$

$$v_3 = 2v_1 + v_2$$

$$v_4 = v_1 + 2v_2$$

<u>Autre méthode</u> : (Par le théorème de la base incomplète)

On a (v_1, v_2) libre (car non proportionnels), et (v_1, v_2, v_3) lié car ;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $v_3 \in vect(v_1, v_2)$

et on a $(v_1, v_2, , v_4)$ lié car :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $v_4 \in vect(v_1, v_2)$

Donc (v_1, v_2) base de $vect(\mathscr{S})$ et par suite $rang(\mathscr{S}) = 2$ $\square$

Autre méthode : Soit $M_B(\mathscr{S})$ la matrice de $\mathscr{S}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$M_B(\mathscr{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ramène $M_B(\mathscr{S})$ a une matrice échelonnée par des opérations élementaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $rang(\mathscr{S}) = 2$ $\square$

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$
Réponse : La première et la deuxième métode ci-dessus donne (v_1, v_2) comme base de $vect(\mathscr{S})$. On peut aussi vérifier que comme le rang est 2, tous les choix de deux parmis v_1, v_2, v_3, v_4 donne une base de $vect(\mathscr{S})$ $\square$.

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.
Réponse : Selon la base choisie on trouve :

$$\begin{cases} v_3 = 2v_1 + v_2 \\ v_4 = v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2/3v_3 - 1/3v_4 \\ v_2 = -1/3/v_3 + 2/3v_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = -2v_1 + v_3 \\ v_4 = - - 3v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = -1/2v_1 + 1/2v_4 \\ v_3 = 3/2v_1 + 1/2v_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -2v_2 + v_4 \\ v_3 = -3v_2 + 2v_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -1/2v_2 + 1/2v_3 \\ v_4 = 3/2v_2 + 1/2v_3 \end{cases}$$

III Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1 Montrer que $Im(f \circ f) \subset Im(f)$

Réponse : Soit $y \in Im(f \circ f)$, $y = f \circ f(x)$ $x \in E$, donc $y = f(f(x))$, donc $y = f(x')$ $x' \in E$, donc $y \in Im(f)$ $\square$

2 Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f \circ f)$

Réponse : Soit $x \in Ker(f)$, donc $f(x) = 0$, donc $f(f(x)) = f(0) = 0$, donc $f \circ f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f \circ f)$ $\square$

On suppose que

$$E = Ker(f) + Im(f)$$

3 Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$

Réponse : On a $dim(Ker(f)+Im(f)) = dim(E) = dim(Ker(f))+dim(Im(f))$ (par le théorème du rang). D'après une caractéristisation des sommes directes (cf cours), si $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie :

$$dim(F_1 + F_2 + \ldots + F_k) = \sum_i dim(F_i) \Longrightarrow F_1 + F_2 + \ldots + F_k \ directe$$

on en déduit que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ $\square$

4 Soit $x \in Ker(f \circ f)$, montrer que $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$

Réponse : $x \in Ker(f \circ f)$ donc $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in Ker(f)$, par définition de $Im(f)$ on a $f(x) \in Im(f)$, donc $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$ $\square$

5 En déduire que $Ker(f) = Ker(f \circ f)$

Réponse : On a montrer que $Ker(f) \subset Ker(f \circ f)$, par la question précédente si $x \in Ker(f \circ f)$ on a $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$, or la somme $Ker(f)+Im(f)$ est directe, donc $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f)$, donc $Ker(f \circ f) \subset Ker(f)$, finalement on a $Ker(f) \subset Ker(f \circ f)$ et $Ker(f \circ f) \subset Ker(f)$, donc $Ker(f \circ f) = Ker(f)$ $\square$

6 Montrer que $Im(f) = Im(f \circ f)$

Réponse : On a montrer que $Im(f \circ f) \subset Im(f)$, on a $dim(Im(f \circ f)) = dim(E) - dim(ker(f \circ f))$, par la question précédente $Ker(f) = Ker(f \circ f)$, donc $dim(Im(f \circ f)) = dim(E) - dim(ker(f)) = dim(Im(f))$, on a donc $Im(f \circ f) \subset Im(f)$ et $dim(Im(f \circ f)) = dim(Im(f))$, comme $Im(f)$ est de dimension finie, on en déduit que ,$Im(f \circ f) = Im(f)$ $\square$

7 Inversement si $Im(f) = Im(f \circ f)$ montrer que $E = Ker(f) + Im(f)$

Réponse : Supposons $Im(f) = Im(f \circ f)$. Soit $x \in E$, on $f(x) \in Im(f)$, donc $f(x) \in Im(f \circ f)$, donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f(f(x'))$, c'est-á-dire :$f(x) - f(f(x')) = 0$, donc $f(x - f(x')) = 0$, donc $x - f(x') \in Ker(f)$, posons $x'' = x - f(x')$, on a $x = x'' + f(x')$ et $x'' \in Ker(f)$ et $f(x') \in Im(f)$, donx $x \in Ker(f) + Im(f)$, donc $E = Ker(f) + Im(f)$ $\square$

IV Soit $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \longrightarrow (2x + y + z, x + 2y + z)$

1 Montrer que f est linéaire

2 Ecrire la matrice de f dans la bases (canoniques) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $B' = ((1, 0), (0, 1))$

Réponse :

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

3 Soit $B_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$. Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$

Réponse : B_2 est libre car :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Comme c'est un système de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ceci suffit pour qu'il soit une base $\square$

4 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'

Réponse :

$$M_{B_2B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \square$$

5 Donner la matrice de passage de B à B_2

Réponse :

$$P_{BB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

6 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

Réponse :

$$M_{B_2B'}(f) = M_{BB'}(f)P_{BB_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

V Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X-4)(X-1)^2$

Réponse :

$$P_A = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1 \\ 4-X & 2-X & 1 \\ 4-X & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (4-X)(1-X)^2$$

ou encore :

$$P_A = -X^3 + tr(A)X^2 - \delta_2 X + det(A)$$

$$tr(A) = 2+2+2 = 6$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3+3+3 = 9$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Donc

$$P_A = -X^3 + 6X^2 - 9X + 4$$

1 est racine de P_A

$$P_A = (X-1)(-X^2 - 3X + 4) = (X-1)(X-1)(4-X) \qquad \square$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse : $sp(A) = \{1, 4\}$ $\square$

3 Donner les vecteurs propres de A

Réponse :

$$Ker(A - 4I_3) = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker(A - I_3) = vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \square$$

4 Justifier que A est diagonalisable.

Réponse : P_A est scindé et pour chaque valeur propre de A on a $dim(Ker(A-\lambda I_n)) = m_\lambda$

5 Donner une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale tel que $P^{-1}AP = D$

Réponse :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$