

Session ordinaire du printemps 2011

<http://webservice.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

solution

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}$$

- Q quotient de la division euclidienne de X^6 par $(X-1)^2(X^2+1)^2 \rightarrow Q = 1$
- Pour calculer a, b on pose $h = X - 1$ et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de h^2F

$$\begin{aligned} h^2F &= \frac{X^6}{(X^2+1)^2} \Bigg|_{X=h+1} = \frac{(h+1)^6}{((h+1)^2+1)^2} \\ &= \frac{1+6h}{4(1+2h)} + O(h^2) = 1/4 + h + O(h^2) \end{aligned}$$

par suite

$$F = \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \dots$$

- Pour calculer c, d, e, f on pose $h = X^2 + 1$, on a

$$\begin{aligned} h^2F &= \frac{X^6}{(X-1)^2} \Bigg|_{X^2=h-1} = \frac{(h-1)^3}{h-2X} = \frac{-1+3h+O(h^2)}{h-2X} \quad (*) \\ &= \frac{(-1+3h)(h+2X)+O(h^2)}{(h-2X)(h+2X)} = \frac{-2X+(6X-1)h+O(h^2)}{h^2-4X^2} \\ &= \frac{-2X+(6X-1)h+O(h^2)}{4-4h+O(h^2)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}(4X - 1)h + O(h^2)$$

par suite

$$F = \frac{-X}{2(X^2 + 1)^2} + \frac{-1 + 4X}{4(X^2 + 1)} + \dots$$

Finalement

$$F = 1 + \frac{1}{4(X - 1)^2} + \frac{1}{X - 1} + \frac{-X}{2(X^2 + 1)^2} + \frac{-1 + 4X}{4(X^2 + 1)}$$

Remarque : On peut aussi faire directement la division euclidienne suivant les puissances croissances de h avec retenue, de $-1 + 3h$ par $-2X + h$, dans (*), le pivot est $1/(-2X) = X/2 \pmod{h}$

$$\begin{array}{r|l} -1 + 3h & -2X + h \\ \hline X^2 + (-X/2)h = -1 + (1 - X/2)h & -X/2 + (X + X^2/4)h = -X/2 + (X - 1/4)h \\ (2 + X/2)h & \end{array}$$

Autre méthode par l'identité de Besout : On cherche U tel que $U(X - 1)^2 = 1 + V(X^2 + 1) \rightarrow U = X/2$, alors $eX + f$ est le reste de $X^6 U$ par $X^2 + 1 \rightarrow eX + f = -X/2$, posons $X^6 - (X - 1)^2(eX + f) = A_2(X^2 + 1) \rightarrow A_2 = X^4 - X^2 + \frac{1}{2}X$, alors $cX + d$ est le reste de $A_2 U$ par $X^2 + 1 \rightarrow cX + d = X - 1/4$

Autre méthode on développe

$$F_1 = \frac{X^3}{(X - 1)(X^2 + 1)} \rightarrow$$

$$F_1 = 1 + \frac{1}{2(X - 1)} + \frac{X - 1}{2(X^2 + 1)}$$

et on a

$$F = F_1^2 = 1 + \frac{1}{4(X - 1)^2} + \frac{(X - 1)^2}{4(X^2 + 1)^2} + \frac{1}{X - 1} + \frac{X - 1}{X^2 + 1} + \frac{1}{2(X^2 + 1)}$$

Le seul élément non simple est

$$\frac{(X - 1)^2}{4(X^2 + 1)^2} = \frac{h - 2X}{4h^2} = \frac{1}{4h} - \frac{X}{2h^2}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 F &= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{1}{2(X^2+1)} + \frac{1}{4(X^2+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)^2} \\
 &= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{4X-1}{4(X^2+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

Autre méthode par identification, on multiplie F par $(X-1)^2(X^2+1)^2$ et on identifie les coefficients. \square

II On considère dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 le système :

$$\mathcal{S} = ((1, 2, 1), (-1, 0, 1), (2, 6, 4), (-1, 2, 3))$$

1 Donner le rang de \mathcal{S} (Justifier votre réponse)

On résout le système

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 & (*) (1) \\ 2(x_2 - 2x_3 + x_4) + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ (x_2 - 2x_3 + x_4) + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (*) (1) \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 & (*) (2) \end{cases}$$

2 inconnues éliminées \rightarrow le rang = 2 \square

Autre méthode : (v_1, v_2) est libre car $1/-1 \neq 2/0$. Donc le rang est au moins 2, on a (calcul) $v_3 = 3v_1 + v_2$ et $v_4 = v_1 + 2v_2$ donc le rang = 2 \square

Autre méthode : On applique l'algorithme de complétion à savoir (rappel) :
 E espace vectoriel, $L \subset E$ libre, $G \subset E$ générateur :

- i. Si $G = \emptyset$ terminer L est une base
- ii. Soit $x \in G$, $G = G \setminus \{x\}$
- iii. Si $x \notin \text{vec}(L)$ alors $L = L \cup \{x\}$
- iv. Aller à i.

Ici $E = \text{vect}(\mathcal{S})$, $L = \emptyset$ et $G = \mathcal{S}$

- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_1 \longrightarrow G = (v_2, v_3, v_4)$
- ii. $x \notin \text{vect}(L) = \{0\} \longrightarrow L = (v_1)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_2 \longrightarrow G = (v_3, v_4)$
- ii. $x \notin \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_3 \longrightarrow G = (v_4)$
- ii. $x \in \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_4 \longrightarrow G = \emptyset$
- ii. $x \in \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G = \emptyset \longrightarrow L = (v_1, v_2)$ est une base \square

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rang} = 2 \quad \square$$

2 Donner une base de $\text{vect}(\mathcal{S})$

Réponse : Par la première méthode x_1, x_2 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2)$ base. Par la deuxième et la troisième méthode aussi (v_1, v_2) base. \square

3 Donner la décomposition des autres éléments de \mathcal{S} dans la base ci-dessus.

Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(-3x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{aligned} x_1 &= -v_3 - v_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4, \end{aligned}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_3 = 3v_1 + v_2 \quad v_4 = v_1 + 2v_2 \quad \square$

Autre possibilités :

$$(v_1, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -3v_1 + v_3 \\ v_4 = -5v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

$$(v_1, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \\ v_3 = \frac{5}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \end{cases}$$

$$(v_2, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 \\ v_4 = \frac{5}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 \end{cases}$$

$$(v_2, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 + v_4 \\ v_3 = -5v_2 + 3v_4 \end{cases}$$

$$(v_3, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{2}{5}v_3 - \frac{1}{5}v_4 \\ v_2 = -\frac{1}{5}v_3 + \frac{3}{5}v_4 \end{cases} \quad \square$$

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K[X]$ formé des polynômes de degré ≤ 3

$$E = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in K\}$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K[X]$

Réponse :

- Le polynôme 0 appartient à E car $0 = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \longrightarrow E \neq \emptyset$
- Si $P, Q \in E$ et $\lambda \in K$ écrivons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ alors $P + \lambda Q = (a_0 + \lambda b_0) + (a_1 + \lambda b_1)X + (a_2 + \lambda b_2)X^2 + (a_3 + \lambda b_3)X^3$ donc $P + \lambda Q \in E$, autre méthode :

$$d^\circ(P + \lambda Q) \leq \max(d^\circ(P), d^\circ(\lambda Q)) \leq 3 \quad \square$$

2 Montrer que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E

Réponse : Par construction c'est un générateur et il est libre par définition de $K[X]$ \square

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow K^2 \\ P &\longrightarrow (P(0), P(1)) \end{aligned}$$

3 Montrer que f est linéaire.

Réponse : Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)(1)) = (P(0) + \lambda Q(0), P(1) + \lambda Q(1)) \\ &= (P(0), P(1)) + \lambda(Q(0), Q(1)) = f(P) + \lambda f(Q) \quad \square \end{aligned}$$

Autre méthode au moyen de l'écriture explicite de

$$f(P) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \quad \square$$

4 Justifier que la matrice de f dans les bases $B = (1, X, X^2, X^3)$ et $B' = ((1, 0), (0, 1))$ est

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Réponse : On a :

- $f(1) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$
- $f(X) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$
- $f(X^2) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$
- $f(X^3) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1) \quad \square$

5 Soit $P \in E$, donner au moyen de $M_{BB'}(f)$ l'écriture explicite de $f(P)$

Réponse : $M_{B'}(f(P)) = M_{BB'}(f)M_B(P)$, soit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

6 Donner une base de $\ker(f)$

Réponse : Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$

$$P \in \ker(f) \iff f(P) = (0, 0) \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} *(1) \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} *(1) \\ a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases} \quad *(2)$$

Donc

$$\ker(f) = \{(-a_2 - a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_2, a_3 \in K\} \quad \square$$

7 En déduire que si $P \in \ker(f)$ alors P est de la forme $X(X-1)(aX+b)$

Réponse : $(-a_2 - a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X^2) = (a_2 + a_3X)(X^2 - X)$ \square

8 Donner au moyen de $M_{BB'}(f)$, un générateur ensuite une base de $\text{Im}(f)$

Réponse : Un générateur de $\text{Im}(f)$ est $\mathcal{S} = (f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ et la matrice de \mathcal{S} dans B est

$$M_B(\mathcal{S}) = M_{BB'}(f)$$

On a $(1, 1), (0, 1)$ libre et $(0, 1) \in \text{vect}((1, 1), (0, 1))$ donc une base des colonnes de $M_B(\mathcal{S})$ est $(1, 1), (0, 1)$, donc une base de $\text{vect}(\mathcal{S})$ est $(f(1), f(X))$ soit une base de $\text{Im}(f)$ est $(f(1), f(X))$ \square

9 Vérifier la formule liant $\dim(\ker(f))$ et $\dim(\text{Im}(f))$

Réponse : $\dim(E) = 4 = 2 + 2 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ \square

10 Soit $B_2 = (1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$. Montrer que B_2 est une base de E

Réponse : Comme $|B_2| = 4 = \dim(E)$ il suffit de montrer que B_2 est libre, soit une relation :

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X(X-1)^2 = 0$$

- Avec $X = 0 \longrightarrow \lambda_0 = 0$
- Avec $X = 1 \longrightarrow \lambda_1 = 0$
- Il reste $\lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X(X-1)^2 = 0$ donc en simplifiant par $X(X-1)$ il reste $\lambda_2 + \lambda_3 X = 0 \longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ \square

11 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'

Réponse : On a :

- $f(1) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$
- $f(X) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$
- $f(X(X-1)) = (0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1)$
- $f(X(X-1)^2) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$

Donc

$$M_{B_2 B'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

12 Donner la matrice de passage de B à B_2

Réponse :

- $1 = 1 \cdot 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$
- $X = 0 \cdot 0 + 1X + 0X^2 + 0X^3$
- $X(X-1) = 0 \cdot 0 + (-1)X + 1X^2 + 0X^3$
- $X(X-1)^2 = X - 2X^2 + X^3 = 0 \cdot 0 + 1X + (-2)X^2 + 1X^3$

donc :

$$P_{BB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

13 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

Réponse :

$$M_{B_2B'} = P_{B'B}^{-1} M_{BB'}(f) P_{BB_2} = M_{BB'}(f) P_{BB_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

IV Soit dans $M_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^4$

Réponse :

$$\begin{aligned} P_A = \det(A - X_{I_4}) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-X & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-X & -2 \\ 2 & -2-X \end{vmatrix} \\ &= (1 - (1 - X^2))(4 - (4 - X^2)) = X^4 \quad \square \end{aligned}$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse :

$$sp(A) = \{0\} \quad \square$$

3 Donner les vecteurs propres de A

Réponse :

$$(x, y, z, t) \in E_0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + 4y + 2z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y & * (1) \\ 0 = 0 \\ 2y + 2z - 2t = 0 \\ 9y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} *(1) \\ y = t - z \\ z - t = 0 \end{cases} \quad *(2) \Leftrightarrow \begin{cases} *(1) \\ *(2) \\ z = t \end{cases} \quad *(3)$$

Donc

$$E_0 = \{(0, 0, t, t) \mid t \in K\} \quad \square$$

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).

Réponse : A n'est pas diagonalisable car $\dim(E_0) = 1 \neq m_0 = 4 \quad \square$

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E . On suppose que

$$E = \ker(f) + \ker(g) \quad \text{et} \quad E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$

1 Montrer que

$$\dim(E) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) \quad (1)$$

et

$$\dim(E) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) \quad (2)$$

Réponse : D'après le cours $\dim(F + F') \leq \dim(F) + \dim(F')$, donc :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f) + \ker(g)) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))$$

$$\dim(E) = \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) \quad \square$$

2 En déduire que

$$2\dim(E) \leq (\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))) + (\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))) \quad (3)$$

Réponse : On fait la somme membre à membre des deux inégalités \square

3 Montrer que (3) est une égalité

Réponse : (3) est une égalité car

$$(\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))) + (\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)))$$

$$= (\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))) + (\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g))) = \dim(E) + \dim(E) \quad \square$$

4 En déduire que (1) et (2) sont des égalités

Réponse : Si (1) ou (2) est stricte (3) serait stricte \square

5 Montrer que les sommes $\ker(f) + \ker(g)$ et $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ sont directes

Réponse : D'après le cours si $\dim(F), \dim(F')$ finies et $\dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F')$ alors $F + F'$ est directe \square