UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2011/2012
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2012

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

Solution

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{2X^4}{(X+1)^2(X^2+3)}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+3}$$

- Q quotient de la division euclidiène de $2X^4$ par $(X+1)^2(X^2+3) \longrightarrow Q = 2$
- Pour calculer a, b on pose $h = X+1$ et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de h^2F

$$h^2F = \frac{2X^4}{(X^2+3)} \quad \Big|_{X=h-1} = \frac{2(h-1)^4}{((h-1)^2+3)}$$

$$= \frac{2(1-4h)}{4-2h} + O(h^2) = 1/2 - (7/4)h + O(h^2)$$

par suite

$$F = \frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{7/4}{X+1} + \dots$$

- Pour calculer c, d on pose $h = X^2+3$, on a

$$hF = \frac{2X^4}{(X+1)^2} \quad \Big|_{X^2=h-3} = \frac{2(h-3)^2}{h+2X-2} = \frac{18+O(h)}{2X-2+O(h)} \qquad (*)$$

$$= \frac{18(-2X-2)}{(2X-2)(-2X-2)} + O(h) = \frac{-36(X+1)}{16} + O(h)$$

par suite

$$F = -\frac{9(X+1)}{4(X^2+3)} + \dots$$

Finalement

$$F = 2 + \frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{7/4}{X+1} - \frac{9(X+1)}{4(X^2+3)}$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi faire directement la division euclidiènne suivant les puissaces croissantes de h avec retenue, de 9 par $X-1$, dans $(*)$, le pivot est $1/(X-1) = -(X+1)/4 \qquad mod(h)$

$$\begin{array}{c|c} 9 & X-1 \\ \hline 9 & -9(X+1)/4 \end{array}$$

Autre méthode par l'identité de Besout : On cherche U tel que $U(X+1)^2 = 1 + V(X^2+3) \longrightarrow U = -(X+1)/8$, alors $cX+d$ est le reste de $2X^4U$ par $X^2+3 \longrightarrow cX+d = -9(X+1)/4$

Autre méthode par réductions élémentaires succesives :

$$\frac{1}{(X+1)(X^2+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-1}{X^2+3}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(X+1)^2(X^2+3)} = \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\frac{(X-1)^2}{X^2+3} \longrightarrow \dots$$

Ensuite on multiplie par $2X^4$ et on réduit les fractions quasi simples obtenues

Autre méthode par identification, on multplie F par $(X+1)^2(X^2+3)$ et on identifie les coefiçients. $\square$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\mathscr{S} = ((2,-1,0,1),(1,-1,1,1),(7,-4,1,1),(4,-3,2,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

On résoud le système

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 - 7x_3 - 4x_4 \qquad (*)(1) \\ -x_1 - (-2x_1 - 7x_3 - 4x_4) - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ (-2x_1 - 7x_3 - 4x_4) + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + (-2x_1 - 7x_3 - 4x_4) + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ (*)(1) \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ (*)(1) \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 = -6x_3 - x_4 \qquad (*)(2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ (*)(1) \\ (-6x_3 - x_4) + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2(-6x_3 - x_4) - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ \ (*)(2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ (*)(1) \\ -3x_3 = 0 \\ 6x_3 = 0 \\ \ (*)(2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ (*)(1) \\ x_3 = 0 \qquad (*)(3) \\ 0 = 0 \\ \ (*)(2) \end{cases}$$

3 inconnues éliminées $\longrightarrow$ le rang $= 3$ $\qquad \square$

Autre méthode : (v_1, v_2) est libre car $1/-1 \neq 2/0$. Donc le rang est aumoin 2, on vérifie que (v_1, v_2, v_3) est aussi libre et on a (calcul) $)v_4 = v_1 + 2v_2$ donc le rang =2 $\qquad \square$

Autre méthode : On applique l'algorithme de complétition à savoir (rappel) : E espace vectoriel, $L \subset E$ libre , $G \subset E$ générateur :

i. Si $G = \emptyset$ terminer L est une base
ii. Soit $x \in G$, $G = G \setminus \{x\}$
iii. Si $x \notin vec(L)$ alors $L = L \cup \{x\}$
iv. Aller à i.

Ici $E = vect(\mathscr{S})$, $L = \emptyset$ et $G = \mathscr{S}$

i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_1 \longrightarrow G = (v_2, v_3, v_4)$
ii. $x \notin vect(L) = \{0\} \longrightarrow L = (v_1)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_2 \longrightarrow G = (v_3, v_4)$
ii. $x \notin vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_3 \longrightarrow G = (v_4)$
ii. $x \notin vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2, v_3)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_4 \longrightarrow G = \emptyset$
ii. $x \in vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2, v_3)$
i. $G = \emptyset \longrightarrow L = (v_1, v_2, v_3)$ est une base $\square$

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rang = 3$$

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$
Réponse : Par la première méthode x_1, x_2, x_3 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2, v_3)$ base. Par la deuxième et la troisième méthode aussi (v_1, v_2, v_3) base. $\square$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.
Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(-x_4, -2x_4, 0, x_4) \mid, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} & & -v_4 \\ x_1 & = & -x_4 \\ x_2 & = & -2x_4, \\ x_3 & = & 0 \end{array}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_4 = v_1 + 2v_2$ $\square$

Autre possibilitées :

(v_1, v_3, v_4) base $\longrightarrow \left\{ v_2 = \frac{1}{2}(v_4 - v_1) \right.$

(v_2, v_3, v_4) base $\longrightarrow \left\{ v_1 = v_4 - 2v_2 \right.$ $\square$

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K(X)$:

$$E = \left\{ \frac{a_0 + a_1 X + a_2 X^2}{X(X-1)} \mid a_0, a_1, a_2 \in K \right\}$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K(X)$

Réponse : On applique la caractérisation d'un sous espace vectoriel . Autre méthode, posons $r_1 = 1/(X(X-1))$ $r_2 = X/(X(X-1))$ $r_3 = X^2/(X(X-1))$, par construction $E = vect(r_1, r_2, r_3)$, donc E est un sous espace vectoriel de $K(X)$ $\square$

2 Montrer que $1, 1/X, 1/(X-1) \in E$

Réponse : Il suffit de prendre pour $a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ succesisevement $X(X-1),\ X-1,\ X$ $\square$

3 Montrer que $B = (1, 1/X, 1/(X-1))$ est une base de E
Réponse : Soit $r \in E$, sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$r = a + \frac{b}{X} + \frac{c}{X-1}$$

Autre méthode, par construction $E = vect(r_1, r_2, r_3)$, donc $\dim(E) \leq 3$; d'autre part $(1, 1/X, 1/(X-1))$ est libre dans $K(X)$ car formé d'élements simples, donc $\dim(E) \geq 3$, par suite $\dim(E) = 3$ et B base de E (car libre et $|B| = 3 = \dim(E)$ $\square$

Soit $f\ : E \longrightarrow E \quad \dfrac{a_0 + a_1 X + a_2 X^2}{X(X-1)} \longrightarrow \dfrac{a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2}{X(X-1)}$

4 Montrer que f est un endomorphisme de E

5 Calculer $M_B(f)$

Réponse :

- $f(1) = f(\dfrac{X(X-1)}{X(X-1)}) = f(\dfrac{-X+X^2}{X(X-1)}) = \dfrac{-(1-X)+(1-X)^2}{X(X-1)} = \dfrac{-X+X^2}{X(X-1)}$
  Soit $f(1) = 1$
- $f(1/X) = f((X-1)/(X(X-1))) = (-X)/(X(X-1)) = -1/(X-1)$
- $f(1/(X-1)) = f(X/(X(X-1))) = (1-X)/(X(X-1)) = -1/X$

Donc

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

6 Ecrire matricielement la relation $f(v) = 0$

Réponse : Si $v = a + b/X + c/(X-1) \in E$ on a :

$$f(v) = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

7 Montrer que f est injective

Réponse : Comme f est linéaire on a :

$$f\ injective \iff Ker(f) = \{0\}$$

et on a pour $v = a + b/X + c/(X-1) \in E$:

$$v \in Ker(f) \iff f(v) = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow v = 0 \qquad \square$$

8 En déduire que f est un automorphisme de E

Réponse : f est un endomorphisme injectif de E et E de dimension finis $\longrightarrow f\ bijectif$ $\quad \square$

Soit $B' = (1/(X(X-1)), X/(X(X-1)), (X+1)/X)$

9 Montrer que B' est libre

Réponse : On :

$$\frac{\lambda_1}{X(X-1)} + \frac{\lambda_2 X}{X(X-1)} + \frac{\lambda_3(X-1)(X+1)}{X(X-1)} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2}{X(X-1)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \qquad \square$$

10 En déduire que B' est une base de E

B' est libre et $|B'| = \dim(E)$ $(finie)$ $\longrightarrow B'$ *base de* E $\square$

11 Donner la matrice de passage de B à B'

Réponse :

- $\dfrac{1}{X(X-1)} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X}$
- $\dfrac{X}{X(X-1)} = \dfrac{1}{X-1}$
- $\dfrac{1+X}{X} = 1 + \dfrac{1}{X}$

Donc :

$$P_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

12 Calculer $M_{B'}(f)$

Réponse : Posons $P = P_{BB'}$

$$M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f) P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

IV Soient A,B,C des matrices de types respectivement $(m, n), (p, q)$ et (r, s). Trouver toutes les valeurs possibles de (m, n, p, q, r, s) pour que ABC, CAB et BCA soient définies.

Réponse :

- ABC définie si et seulement si AB et (AB)C définies, soit si et seulement si $n = p$ *et* $q = r$
- CAB définie si et seulement si CA et (CA)B définies, soit si et seulement si $s = m$ *et* $n = p$
- BCA définie si et seulement si BC et (BC)A définies, soit si et seulement si $q = r$ *et* $s = m$

donc ABC, CAB et BCA définies si et seulement si :

$$\begin{cases} n = p \\ q = r \\ s = m \end{cases}$$

La solution de ce système dans $\mathbb{R}$ est $\{(m, p, p, r, r, m) \mid m, p, r \in \mathbb{R}\}$ la solution dans $\mathbb{N}$ impose que $m, p, r \in \mathbb{N}$ $\square$

V Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments et K un corps commutatif.

1 Montrer que l'application $\varphi \ : K^E \longrightarrow M_{n,1}(K) \qquad f \longrightarrow \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Réponse :

- On vérifie que φ est linéaire.
- φ est injective car pour $f \in K^E$:

$$\varphi(f) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall x \in E \qquad f(x) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$$

- φ est surjective car pour tout $M = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ soit $f \in K^E$ définie par $f(x_i) = y_i$, on a $\varphi(f) = M$ $\square$

2 Soient $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ un système de K^E. Soit $A = (f_j(x_i)) \in M_{n,p}(K)$. Montrer que :

$$(f_1, f_2, \ldots, f_p) \ libre \Longleftrightarrow rang(A) = p$$

Réponse : Comme A a p colonnes, $rang(A) = p$ si et seulement si les colonnes de A forment un système libre, ce qui se traduit facilement par isomorphisme à ce que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ libre (les colonnes de A sont les images respectives des f_j par φ) $\square$

3 En déduire que :

$$(f_1, f_2, \ldots, f_p) \ libre \Longleftrightarrow \exists y_1, y_2, \ldots y_p \in E \ tel \ que \ (f_j(y_i)) \ inversible$$

Réponse : $rang(A) = p$ si et seulement si les lignes de A forment un système de $rang \ p$ $\square$

VI Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E.

1 Montrer que $Im(f \circ g) \subset Im(f)$
Réponse : Soit $y \in Im(f \circ g)$ il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g)(x)$ donc $y = f(g(x))$ donc $y \in Im(f)$ $\square$

2 En déduire que $rg(f \circ g) \leq rg(f)$
Réponse : $rg(f \circ g) = \dim(Im(f \circ g))$, comme $Im(f \circ g) \subset Im(f) \longrightarrow \dim(Im(f \circ g)) \leq \dim(Im(f)) = rg(f)$ $\square$

3 Montrer que $Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$
Réponse : Soit $x \in Ker(g) \longrightarrow g(x) = 0 \longrightarrow f(g(x)) = 0 \longrightarrow x \in Ker(f \circ g)$ $\square$

4 En déduire que $rg(f \circ g) \leq rg(g)$
Réponse : $rg(f \circ g) = \dim(Im(f \circ g)) = \dim(E) - \dim(Ker(f \circ g))$, comme $Ker(g) \subset Ker(f \circ g) \longrightarrow \dim(Ker(g)) \leq \dim(Ker(f \circ g)) \longrightarrow rg(g) = \dim(E) - \dim(Ker(g)) \geq \dim(E) - \dim(Ker(f \circ g)) = rg(f \circ g)$ $\square$

5 Soit $x \in Ker(f \circ g)$ montrer que $g(x) \in Ker(f)$
Réponse : $f(g(x)) = 0 \longrightarrow g(x) \in Ker(f)$ $\square$

Soit l'application linéaire $\theta\ : Ker(f \circ g) \longrightarrow Ker(f) \qquad x \longrightarrow g(x)$

6 Montrer que $Ker(\theta) = Ker(g)$
Réponse : Si $x \in Ker(\theta) \longrightarrow \theta(x) = 0 \longrightarrow g(x) = 0 \longrightarrow x \in Ker(g)$, inversement si $x \in Ker(g)$ comme $Ker(g) \subset Ker(f \circ g))$ on a $x \in Ker(f \circ g))$ et $\theta(x)(= g(x)) = 0 \longrightarrow x \in Ker(\theta)$ $\square$

7 Montrer que $Im(\theta) = Im(g) \cap Ker(f)$
Réponse : Soit $y \in Im(\theta)$ il existe $x \in Ker(f \circ g)$ tel que $y = \theta(x) = g(x) \longrightarrow y \in Im(g)$ comme $y \in Im(\theta) \subset Ker(f) \longrightarrow y \in Im(g) \cap Ker(f)$. Inversement soit $y \in Im(g) \cap Ker(f) \longrightarrow$ il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et $f(y) = 0$ soit $f \circ g(x) =$ donc $x \in Ker(f \circ g)$ et $y = g(x) \longrightarrow y \in Im(\theta)$ $\square$

8 Montrer que

$$\dim(Ker(f \circ g)) \leq \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g))$$

Réponse : $\dim(Ker(f \circ g)) = \dim(Im(\theta)) + \dim(Ker(\theta)) = \dim(Im(g) \cap Ker(f)) + \dim(Ker(g))$ or comme $Im(g) \cap Ker(f) \subset Ker(f) \longrightarrow \dim(Im(g) \cap Ker(f)) \leq \dim(Ker(f))$ $\square$

9 Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $Ker(f) \subset Im(g)$
Réponse : L'inégalité est une égalité si et seulement si $\dim(Im(g) \cap Ker(f)) + \dim(Ker(g)) = \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g))$ donc si et seulement si $\dim(Im(g) \cap Ker(f)) = \dim(Ker(f))$ or comme $Im(g) \cap Ker(f) \subset Ker(f)$ de dimension finie $\longrightarrow \dim(Im(g) \cap Ker(f)) = \dim(Ker(f))$ si et seulement si $Im(g) \cap Ker(f) = Ker(f)$ soit si et seulement si $Ker(f) \subset Im(g)$ $\square$

10 Montrer que

$$rg(f) + rg(g) - \dim(E) \leq rg(f \circ g) \leq \inf(rg(f), rg(g))$$

Réponse : On a $rg(f \circ g) \leq rg(f)$ et $rg(f \circ g) \leq rg(g)$ donc $rg(f \circ g) \leq \inf(rg(f), rg(g))$ et $\dim(Ker(f \circ g)) \leq \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g)) \longrightarrow \dim(E) - \dim(Ker(f \circ g)) \geq \dim(E) - \dim(Ker(f)) - \dim(Ker(g)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) + \dim(E) - \dim(Ker(g)) - \dim(E) = rg(f) + rg(g) - \dim(E)$ $\square$