

**Session ordinaire du printemps 2012**

<http://webservice.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV,V et VI sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction :

$$F = \frac{2X^4}{(X+1)^2(X^2+3)}$$

II On considère dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  le système :

$$\mathcal{S} = ((2, -1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (7, -4, 1, 1), (4, -3, 2, 3))$$

- 1 Donner le rang de  $\mathcal{S}$  (Justifier votre réponse)
- 2 Donner une base de  $\text{vect}(\mathcal{S})$
- 3 Donner la décomposition des autres éléments de  $\mathcal{S}$  dans la base ci-dessus.

III Soit  $K$  un corps commutatif et  $E$  le sous ensemble de  $K(X)$  :

$$E = \left\{ \frac{a_0 + a_1X + a_2X^2}{X(X-1)} \mid a_0, a_1, a_2 \in K \right\}$$

- 1 Montrer que  $E$  est un sous espace vectoriel de  $K(X)$
- 2 Montrer que  $1, 1/X, 1/(X-1) \in E$
- 3 Montrer que  $B = (1, 1/X, 1/(X-1))$  est une base de  $E$
- Soit  $f : E \rightarrow E \quad \frac{a_0 + a_1X + a_2X^2}{X(X-1)} \rightarrow \frac{a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2}{X(X-1)}$
- 4 Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$
- 5 Calculer  $M_B(f)$
- 6 Ecrire matricielement la relation  $f(v) = 0$
- 7 Montrer que  $f$  est injective
- 8 En déduire que  $f$  est un automorphisme de  $E$   
Soit  $B' = (1/(X(X-1)), X/(X(X-1)), (X+1)/X)$
- 9 Montrer que  $B'$  est libre
- 10 En déduire que  $B'$  est une base de  $E$
- 11 Donner la matrice de passage de  $B$  à  $B'$
- 12 Calculer  $M_{B'}(f)$

IV Soient A,B,C des matrices de types respectivement  $(m, n)$ ,  $(p, q)$  et  $(r, s)$ . Trouver toutes les valeurs possibles de  $(m, n, p, q, r, s)$  pour que ABC, CAB et BCA soient définies.

V Soit  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ensemble fini à  $n$  éléments et  $K$  un corps commutatif.

1 Montrer que l'application  $\varphi : K^E \longrightarrow M_{n,1}(K) \quad f \longrightarrow \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2 Soient  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  un système de  $K^E$ . Soit  $A = (f_j(x_i)) \in M_{n,p}(K)$ . Montrer que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ libre} \iff \text{rang}(A) = p$$

3 En déduire que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ libre} \iff \exists y_1, y_2, \dots, y_p \in E \text{ tel que } (f_j(y_i)) \text{ inversible}$$

VI Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$ .

1 Montrer que  $Im(f \circ g) \subset Im(f)$

2 En déduire que  $rg(f \circ g) \leq rg(f)$

3 Montrer que  $Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$

4 En déduire que  $rg(f \circ g) \leq rg(g)$

5 Soit  $x \in Ker(f \circ g)$  montrer que  $g(x) \in Ker(f)$

Soit l'application linéaire  $\theta : Ker(f \circ g) \longrightarrow Ker(f) \quad x \longrightarrow g(x)$

6 Montrer que  $Ker(\theta) = Ker(g)$

7 Montrer que  $Im(\theta) = Im(g) \cap Ker(f)$

8 Montrer que

$$\dim(Ker(f \circ g)) \leq \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g))$$

9 Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si  $Ker(f) \subset Im(g)$

10 Montrer que

$$rg(f) + rg(g) - \dim(E) \leq rg(f \circ g) \leq \inf(rg(f), rg(g))$$