UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMA-SMI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2008/2009
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2009

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
email : mustapha.chellali@gmail.com

Solution

I Soit A un anneau. On pose $m = Car(A)$ la caractéristique de A. On suppose que

$$\forall x \in A \qquad x^6 = x \qquad (*)$$

1 Montrer que $\forall x \in A \qquad 62x = 0$ (Indication faire $x' = 2x$ dans $(*)$)

Réponse : On a $(2x)^6 = 2x$, donc $64x^6 = 2x$, comme $x^6 = x$, il vient $64x = 2x$, soit $62x = 0$ $\square$

2 Montrer que $\forall x \in A \qquad 726x = 0$ (Indication faire $x' = 3x$ dans $(*)$)

Réponse : On a $(3x)^6 = 3x$, donc $729x^6 = 3x$, comme $x^6 = x$, il vient $729x = 3x$, soit $726x = 0$ $\square$

3 En déduire que m divise 2. (On donne $62 = 2.31 \quad 726 = 2.3.11.11$)

Réponse : Puisque $\forall x \in A \qquad 62x = 0$, m divise 62.
Puisque $\forall x \in A \qquad 726x = 0$, m divise 726.
m divise 62 et 726, donc m divise $pgcd(62, 726) = pgcd(2.31, 2.3.11.11) = 2pgcd(31, 3.11.11) = 2$ $\square$

4 En déduire que $\forall x \in A \qquad 2x = 0$

Réponse : on a

$$m \textit{ divise } 2 \Longleftrightarrow (\forall x \in A \qquad 2x = 0) \qquad \square$$

5 Montrer que $\forall x \in A \qquad (1+x)^6 = x + 1 + x^4 + x^2$

Réponse : Par la formule du binôme (car 1 et x commutent), on a :

$$(1+x)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

Or $6x^5 = 2(3x^5) = 0$, de même $20x^3, 6x = 0$. $15x^4 = x + 14x = x$, de même $15x^2 = x^2$. Et on a $x^6 = x$, donc

$$(1+x)^6 = x + 1 + x^4 + x^2 \qquad \square$$

Autre réponse

$$(1+x)^6 = ((1+x)^2)^3 = (1+x^2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6 = 1 + x^2 + x^4 + x \qquad \square$$

Autre réponse

$$(1+x)^6 = ((1+x)^3)^2 = (1+3x+3x^2+x^3)^2 = (1+x+x^2+x^3)^2 = 1+x^2+x^4+x \qquad \square$$

6 En déduire que $\forall x \in A \qquad x^2 = x$

Réponse : D'après la question précédente $x^2 + x^4 = 0$, donc $x^4 = -x^2 = x^2$ (car $2x^2 = 0$), donc $x^6 = x^4$, soit $x = x^2$ $\quad \square$

7 Montrer que A est commutatif. (Seuls les résultats du cours peuvent être admis et utulisés sans démenstration)

Réponse : Soit $a, b \in A$, on a $(a+b)^2 = a + b = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba$, donc $ab + ba = 0$, donc $ab = -ba = ba$ (car $2ba = 0$) $\quad \square$

II Soient dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $A = X^2 + X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 1$

1 En utilisant l' algorithme d'Euclide, montrer que $pgcd(A, B) = 1$

Réponse :

$X^2 + X - 2$	$X^2 + 2X + 1$	$-X - 3$
$X^2 + 2X + 1$	1	$-X + 1$
$-X - 3$	$X^2 + 3X$	
	$-X + 1$	
	$-X - 3$	
	$4 \neq 0$	

Donc $X^2 + 2X + 1$ et $X^2 + X - 2$ sont premiers entre eux. $\square$

On peut aussi permuter les rôles de A et B, cela donne :

$$\begin{array}{c|c|l}
X^2+2X+1 & X^2+X-2 & X+3 \\ \cline{2-3}
X^2+X-2 & 1 & X-2 \\ \cline{1-2}
X+3 & X^2+3X & \\ \cline{2-2}
 & -2X-2 & \\
 & -2X-6 & \\ \cline{2-2}
 & 4 \neq 0 &
\end{array}$$

Donc $X^2 + 2X + 1$ et $X^2 + X - 2$ sont premiers entre eux. $\square$

2 En déduire $U, V \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$UA + VB = 1 \qquad avec \qquad d^\circ(U), d^\circ(V) \leq 1$$

Réponse : Posons $A = X^2 + X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 1$, on a donc

$$B = A + X + 3$$

$$A = (X + 3)(X - 2) + 4$$

Donc

$$A = (B - A)(X - 2) + 4$$

Donc

$$\frac{1}{4}(2 - X)B + \frac{1}{4}(X - 1)A = 1$$

Donc

$$U = \frac{X - 1}{4} \qquad V = \frac{2 - X}{4}$$

Avec la condition $d^\circ(U), d^\circ(V) \leq 1$ la solution est **unique**. $\square$

3 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^6}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 - 2X + 2)^2}$$

Réponse : On a

$$F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^2-2X+2)^2} \qquad 2^2 - 4.2 = -4 < 0$$

Donc

$$F = Q + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2-2X+2} + \frac{eX+f}{(X^2-2X+2)^2}$$

- Q est le quotient de la division euclidiène de X^6 par $(X^2-2X+1)(X^2-2X+2)^2$ soit $Q = 1$
- Calcul de $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2}$

  Le mieux est d'utiliser la méthode du développement limité : On pose $h = X - 1$

  $$h^2 F = \frac{(h+1)^6}{(h+1)^2 - 2(h+1) + 2} = \frac{1 + 6h + O(h^2)}{1 + O(h^2)} = 1 + 6h + O(h^2)$$

  donc

  $$F = \frac{1}{h^2} + \frac{6}{h} + O(1)$$

  Donc $a = 6$ et $b = 1$

  une autre méthode plus lourde pour calculer a, b est la méthode substitution-division, on a

  $$b = (X-1)^2 F|_{x=1} = \frac{X^6}{(X^2-2X+2)^2}|_{X=1} = 1$$

  ensuite

  $$a = \quad (X-1)\left(F - \frac{b}{(X-1)^2}\right)\Bigg|_{X=1}$$

  soit

  $$a = \quad \frac{X^6 - (X^2-2X+2)^2}{(X-1)(X^2-2X+2)^2}\Bigg|_{X=1}$$

  soit

  $$a = \quad \frac{X^6 - X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 8X - 4}{(X-1)(X^2-2X+2)^2}\Bigg|_{X=1}$$

  forcément 1 est racine au numérateur. En effectuant la division euclidiène du numérateur par $X - 1$, on trouve

$$X^6 - X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X^5 + X^4 + 4X^2 - 4X + 4)$$

donc

$$a = \left.\frac{X^5 + X^4 + 4X^2 - 4X + 4}{(X^2-2X+2)^2}\right|_{X=1} = 6$$

On peut aussi utuliser la règele du calcul de limite f/g en un x_0 lorsque $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$a = \left.\frac{(X^6 - (X^2-2X+2)^2)'}{((X-1)(X^2-2X+2)^2)'}\right|_{X=1} = \left.\frac{(X^6 - (X^2-2X+2)^2)'}{(X^2-2X+2)^2}\right|_{X=1} = 6$$

- Calcul de $\dfrac{cX+d}{X^2-2X+2} + \dfrac{eX+f}{(X^2-2X+2)^2}$

Le mieux est d'utiliser la méthode du développement limité : On pose $h = X^2 - 2X + 2$,. On substitut dans $(X^2-2X+2)^2 F$, pour cela en remplace chaque fois que cela se prète X^2 par $h + 2X - 2$ (car $h = X^2 - 2X + 2$), jusqu'à ce que il ne reste que des puissance de X de degré ≤ 1. On a

$$(X^2-2X+2)^2 F = \frac{X^6}{X^2-2X+1} = \frac{(h+2X-2)^3}{(h+2X-2)-2X+1}$$

$$= \frac{(2X-2)^3 - 3(2X-2)^2 h + O(h^2)}{h-1}$$

$$(2X-2)^3 = 8(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 8(X(h+2X-2) - 3(h+2X-2) + 3X - 1)$$

$$= 8(Xh + 2(h+2X-2) - 2X - 3(h+2X-2) + 3X - 1)$$

$$= 8((X-1)h - X + 1)$$

$$3(2X-2)^2 h = 12((h+2X-2) - 2X + 1)h = -12h + O(h^2)$$

D'où

$$(h+2X-2)^3 = (8X+4)h - 8(X-1) + O(h^2)$$

D'où

$$(X^2-2X+2)^2 F = 8(X-1) + 12h + O(h^2)$$

$$F = \frac{8(X-1)}{h^2} + \frac{12}{h} + O(1)$$

Donc

$$\frac{cX+d}{X^2-2X+2} + \frac{eX+f}{(X^2-2X+2)^2} = \frac{12}{X^2-2X+2} + \frac{8(X-1)}{(X^2-2X+2)^2}$$

Finalement la décomposotion de F est

$$\boxed{F = 1 + \frac{6}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{12}{X^2-2X+2} + \frac{8(X-1)}{(X^2-2X+2)^2}}$$

- Autre méthode plus lourde pour calculer $\dfrac{cX+d}{X^2-2X+2}+\dfrac{eX+f}{(X^2-2X+2)^2}$

  On cherche U,V tel que $U(X^2-2X+1)+V(X^2-2X+2)=1$, on trouve facilement $U=-1, V=1$, alors

$$eX+f = reste\ de\ X^6U\ par\ X^2-2X+2 = 8(X-1)$$

  On suite

$$F-\frac{eX+f}{(X^2-2X+2)^2}=\frac{X^6-8(X-1)^3}{(X^2-2X+1)(X^2-2X+2)^2}=$$

$$=\frac{X^4+2X^3+2X^2-8X+4}{(X^2-2X+1)(X^2-2X+2)}$$

  Alors $cX+d$ est le reste de $(X^4+2X^3+2X^2-8X+4)U$ par X^2-2X+2, soit $cX+d=12$
- Autre méthode de décomposition de F, on remarque que

$$\frac{1}{(X^2-2X+1)(X^2-2X+2)}=\frac{1}{X^2-2X+1}-\frac{1}{X^2-2X+2}$$

  D'où

$$\frac{1}{(X^2-2X+1)(X^2-2X+2)^2}=\frac{1}{X^2-2X+1}-\frac{1}{X^2-2X+2}-\frac{1}{(X^2-2X+2)^2}$$

  On multipliant par X^6 on se ramène à des fractions pseudo simples $\square$

III Soit K un corps commutatif. Soit $m,n\in\mathbb{N}$ avec $m,n\geq 1$. Soit $A\in M_{m,n}(K)$ une matrice m lignes, n colonne. ((m,n) s'appel la taille de A). Soit $B\in M_{n,m}(K)$.

1 Justifier que les matrices suivantes sont définies et donner leurs tailles

$$AB \qquad BA \qquad BAB$$

Réponse : A de taille (m,n), B de taille (n,m), alors AB est définit car

$$\text{Nombre de colonnes de } A = \text{Nombre de lignes de } B$$

AB est de taille (m,m)

de même BA est définit de taille (n,n)

B de taille (n, m) et AB de taille (m, m), alors BAB est définit de taille (n, m) $\square$

Pour une matrice carrée $M = (\alpha_{ij})$, on appel trace de M le scalair $\sum_i \alpha_{ii}$. On le note $tr(M)$

2 Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$

Réponse : Copier-Coller de la session ordinaire :

Posons $AB = (c_{ij}) \in M_m(K)$ et $BA = (c'_{ij}) \in M_n(K)$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c'_{kk} = tr(BA) \qquad \square$$

3 En déduire que $tr((AB)^2) = tr((BA)^2)$ (Indication : $(AB)^2 = A(BAB)$)

Réponse : On a $tr((AB)^2) = tr(A(BAB))$, comme $A(BAB)$ et $(BAB)A$ sont définis, par l'associativité du produit matriciel (lui même conséquence de l'associativité de la composition des applications) on a $(BAB)B = (BA)^2$

$$tr(A(BAB)) = tr((BAB)A) = tr((BA)^2) \qquad \square$$

4 Plus généralement montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ $\qquad tr((AB)^k) = tr((BA)^k)$

Réponse :

$$tr((AB)^k) = tr(A(BA)^{k-1}B) = tr((BA)^{k-1}BA) = tr((BA)^k) \qquad \square$$

5 Montrer que l'application $M \in M_p(K) \longrightarrow tr(M) \in K$ est linéaire.
Dans la suite on note $C = I - AB$ et $D = I' - BA$ (I, I' désignant les matrices identités respectivement de même taille que AB et BA)

6 Montrer que $tr(C) - tr(D) = m - n$

Réponse :

$$tr(C) = tr(I - AB) = tr(I) - tr(AB) = m - tr(AB)$$

$$tr(D) = tr(I' - BA) = tr(I') - tr(BA) = n - tr(BA)$$

En soustrayant, compte tenu de $tr(AB) = tr(BA)$, cela donne la relation $\square$

7 Plus généralement montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ $\quad tr(C^k) - tr(D^k) = m - n$

Réponse : Comme I et AB commutent, on a

$$C^k = (I - AB)^k = I + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s (AB)^s$$

Donc

$$tr(C^k) = m + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s tr((AB)^s)$$

de même

$$tr(D^k) = n + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s tr((BA)^s)$$

En soustrayant, compte tenu de $tr((AB)^s) = tr((BA)^s)$, cela donne la relation $\square$

On fixe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Calculer AB et BA

Réponse :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9 Calculer $det(C)$ et $det(D)$ (Justifier vos calculs)

Réponse :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(C) = det(D) = 6$$

Ce résultat est général et peut être déduit de 7). $\square$

IV Soit l'application $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_3 + x_1, x_4, x_3 + x_1 + x_4)$$

1 Montrer que f est linéaire.

2 Soient B_1, B_2 les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. Calculer $M_{B_1B_2}(f)$

Réponse :

$$M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

3 Pour $v \in \mathbb{R}^4$ et $w \in \mathbb{R}^3$, écrire matrciellement la relation $f(v) = w$.

Réponse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad \square$$

4 Donner une base et la dimension de $Ker(f)$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Ker(f) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 + x_1 + x_4 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_3 = -x_1 & (1) \\ x_4 = 0 & (2) \\ 0 = 0 & \end{array} \right.$$

d'où

$$Ker(f) = \{(x_1, x_2, -x_1, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$=< (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0) >=< (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) >$$

$$dim(Ker(f)) = 2 \qquad \square$$

5 Donner une base et la dimension de $Im(f)$.

$$Im(f) = \{x_1(1, 0, 1) + x_3(1, 0, 1) + x_4(0, 1, 1)\}$$

Nous avons éliminé x_3 et x_4, d'où la base de $Im(f)$:

$$((1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

$$dim(Im(f)) = 2 \qquad \square$$

6 Vérifier la relation liant $dim(Ker(f))$ et $dim(Im(f))$.

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 2 + 2 = 4 = dim(\mathbb{R}^4) \qquad \square$$