UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2009/2010
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2010

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
email : mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6+1}{X(X^2+X+1)^2}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} + \frac{dX+e}{(X^2+X+1)^2}$$

- Q quotient de la division euclidiène de X^6+1 par $X(X^2+X+1)^2 \longrightarrow Q = X-2$
- $a = XF|_{X=0} = 1$
- Pour calculer b, c, d, e on pose $h = X^2+X+1$, on a

$$h^2F = \frac{X^6+1}{X} = \frac{(h-X-1)^3+1}{X} = \frac{-(X+1)^3+3h(X+1)^2+1+O(h^2)}{X}$$

$$(X+1)^3 = (X^2+2X+1)(X+1) = (h+X)(X+1)$$

$$= h(X+1)+(X^2+X) = h(X+1)+(h-1) = h(X+2)-1$$

$$3h(X+1)^2 = 3h(h+X) = 3hX + O(h^2)$$

D'où :

$$h^2F = \frac{2(X-1)h+2+O(h^2)}{X}$$

$$= \frac{2(X^2-1)h+2(X+1)+O(h^2)}{X(X+1)}$$

$$= \frac{2(h-X-1-1)h+2(X+1)+O(h^2)}{h-1}$$

$$= \frac{-2(X+2)h+2(X+1)+O(h^2)}{h-1}$$

$$= -2(X+1) + 2h + O(h^2)$$

par suite

$$F = \frac{-2(X+1)}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2}{X^2+X+1} + \dots$$

Autre méthode par l'identité de Besout : On cherche U tel que $UX = 1 + V(X^2+X+1) \longrightarrow U = -X-1$, alors $dX+e$ est le reste de $(X^6+1)U$ par $X^2+X+1 \longrightarrow dX+e = -2X-2$, posons $X^6+1-X(dX+e) = A_2(X^2+X+1) \longrightarrow A_2 = X^4-X^3+X+1$, alors $bX+c$ est le reste de A_2U par $X^2+X+1 \longrightarrow bX+c = 2$

Autre méthode par identification, on multplie F par $X(X^2+X+1)^2$ et on identifie les coefiçients. $\square$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,2,1),(1,1,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

Réponse : On résoud le système

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v4 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \qquad (*)(1) \\ (-x_2 - x_4) + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \qquad (*)(1) \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \qquad (*)(1) \\ x_2 = 2x_3 \qquad (*)(2) \\ (2x_3) + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \qquad (*)(1) \\ x_2 = 2x_3 \qquad (*)(2) \\ 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \qquad (*)(1) \\ x_2 = 2x_3 \qquad (*)(2) \\ x_3 = -x_4 \qquad (*)(3) \end{cases}$$

3 inconnues éliminées $\longrightarrow$ le rang $= 3$ $\square$

Autre méthode : (v_1, v_2, v_3) est libre car :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Donc le rang est aumoin 3, comme $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$, $vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est au plus de dimension 3, donc le rang $=3$ $\square$

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow rang = 3$$

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

Réponse : par la première méthode x_1, x_2, x_3 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2, v_3)$ base de $vect(\mathscr{S})$, par la deuxième méthode aussi $\longrightarrow (v_1, v_2, v_3)$ base de $vect(\mathscr{S})$ $\square$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.

Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(x_4, -2x_4, -x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{array}{ccc} & & -v_4 \\ x_1 & = & x_4 \\ x_2 & =- & -2x_4 \\ x_3 & = & -x_4 \end{array}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_4 = -v_1 + 2v_2 + v_3$

Par la deuxième méthode on cherche α, β, γ tel que $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \longrightarrow \alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 1$

Autres solutions :

$$(v_2, v_3, v_4)\ base \ \longrightarrow v_1 = 2v_2 + v_3 - v_4$$

$$(v_1, v_2, v_4)\ base \ \longrightarrow v_3 = v_1 - 2v_2 + v_4$$

$$(v_1, v_3, v_4)\ base \ \longrightarrow v_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3 + v_4) \qquad \square$$

III Soit $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \longrightarrow (x + y + 2z, x - y + z)$

1 Montrer que f est linéaire

2 Ecrire la matrice de f dans la bases (canoniques) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $B' = ((1, 0), (0, 1))$

Réponse :

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

3 Ecrire matriciellement la relation $f(v) = 0$

Réponse :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

4 Calculer $Ker(f)$

Réponse :

$$(x, y, z) \in Ker(f) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = -2z - y & (*)(1) \\ (-2z - y) - y + z = 0 & \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = -2z - y & (*)(1) \\ y = -z/2 & (*)(2) \end{array} \right.$$

D'où

$$Ker(f) = \{(-3z/2, -z/2, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = vect(-3/2, -1/2, 1) \qquad \square$$

5 En déduire que f est surjective.

Réponse : On a $dim(Ker(f)) = 1$, donc $dim(Im(f)) = dim(E) - dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2$. $Im(f)$ est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^2)$ finie, donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$, donc f est surjective $\square$

6 Soit $B_2' = ((1,2),(1,1))$. Montrer que B_2' est une base de $\mathbb{R}^2$

Réponse : Comme $|B_2'| = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$, il suffit de montrer que B_2' est libre. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc B_2' est libre, donc B_2' est une base de $\mathbb{R}^2$ $\square$

7 Ecrire la matrice de f dans les bases B et B_2'

Réponse :

- $f(1,0,0) = (1,1)$
- $f(0,1,0) = (1,-1) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) \longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \longrightarrow \alpha = -2 \ \beta = 3$
- $f(0,0,1) = (2,1) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) \longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha = -1 \ \beta = 3$

Donc

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

8 Donner la matrice de passage de B' à B_2'

Réponse :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{BB_2'}(f)$

Réponse :

$$M_{BB_2'}(f) = Q^{-1} M_{BB'}(f)$$

On a :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X+1)(X-2)^2$

Réponse : A est une matrice diagonale par blocs.

$$P_A = \begin{vmatrix} -1-X & -3 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & -3 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} \times (2-X)$$

$$= (-1-X)(2-X)(2-X) \qquad \square$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse : $sp(A) = \{2, -1\}$ $\quad \square$

3 Donner les vecteurs propres de A

Réponse : Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - \lambda I_n) \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -3x - 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \; x = -y \right.$$

D'où $Ker(A - \lambda I_n) = vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - \lambda I_n) \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -3y = 0 \\ 3y = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array} \right.$$

D'où $Ker(A - \lambda I_n) = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \square$

4 Justifier que A est diagonalisable.

Réponse : A est diagonalisable car P_A est scindé et pour chaque valeur propre multiple de A, on a $dim(A - \lambda I) = m_\lambda$ ou m_λ est la multiplicité de λ dans P_A $\quad \square$

5 Donner une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale tel que $P^{-1}AP = D$

Réponse :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

V Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. On suppose que $f^3 = 0$

.

1 Montrer que $Im(f^2) \subset Ker(f)$

Réponse : Soit $y \in Im(f^2)$, donc $y = f^2(x)$ $x \in E$, donc $f(y) = f(f^2(x)) = f^3(x) = 0$ (car $f^3 = 0$), ainsi $f(y) = 0$, donc $y \in Ker(f)$ $\square$

2 En déduire que $rg(f) + rg(f^2) \leq dim(E)$

Réponse :

$$rg(f) + rg(f^2) = dim(Im(f)) + dim(Im(f^2))$$

On a $Im(f^2) \subset Ker(f)$ donc $dim(Im(f^2)) \leq dim(Ker(f))$, donc

$$rg(f) + rg(f^2) \leq dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E) \qquad \square$$

3 Montrer que $f(Im(f)) = Im(f^2)$

Réponse : Soit $y \in f(Im(f))$, donc $y = f(x)$ avec $x \in Im(f)$, donc $x = f(x_1)$ $(x_1 \in E)$, donc $y = f(f(x_1)) = f^2(x_1)$, donc $y \in Im(f^2)$. Inversement soit $y \in Im(f^2)$, donc $y = f^2(x)$ $(x \in E)$, donc $y = f(f(x))$, donc $y = f(x_1)$ avec $x_1 = f(x)$, donc $y = f(x_1)$ avec $x_1 \in Im(f)$, donc $y \in f(Im(f))$ $\square$

4 Soit $g\ : Im(f) \longrightarrow Im(f^2)$ $x \longrightarrow f(x)$. Montrer $Ker(g) = Im(f) \cap Ker(f)$

Réponse : (On vérifie immédiatement que g est linéaire).

$$Ker(g) = \{x \in Im(f) \mid f(x) = 0\} = \{x \in Im(f) \mid x \in Ker(f)\}$$

$$= \{x \in E \mid x \in Im(f) \ et \ x \in Ker(f)\} = Im(f) \cap Ker(f) \qquad \square$$

5 Monter que $Im(f^2) \subset Ker(g)$

Réponse : On a $Im(f^2) \subset Ker(f)$ et $Im(f) \subset Im(f^2)$ (cf corrigé de la session ordinaire), donc $Im(f^2) \subset Ker(f) \cap Im(f) = Ker(g)$ $\square$,

6 En déduire que $2rg(f^2) \leq rg(f)$

Réponse : Appliquons le théorème du rang à g

$$dim(Im(f)) = dim(Im(g)) + dim(Ker(g))$$

- $Im(g) = g(Im(f)) = f(Im(f)) = Im(f^2)$
- On a $Im(f^2) \subset Ker(g)$, donc $rg(f^2) \leq dim(Ker(g))$, ainsi

$$rg(f)(= dim(Im(f))) = dim(Im(g)) + dim(Ker(g))$$

$$= dim(Im(f^2)) + dim(Ker(g)) = rg(f^2) + dim(Ker(g)) \geq rg(f^2) + rg(f^2) \qquad \square$$