

Session ordinaire du printemps 2009

<http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III et IV sont indépendants

I Soit A un anneau. $m = \text{Car}(A)$ la caractéristique de A .

- 1 Montrer que $\forall x \in A \quad (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
Dans la suite, on suppose que A vérifie : $\forall x \in A \quad x^5 = x$
- 2 Montrer que $\forall x \in A \quad 30x = 0$ (remplacer x par $2x$)
- 3 Montrer que m divise 30
- 4 On suppose que m divise 2
 - i. Montrer que $\forall x \in A \quad 5(x^4 - x) = 0$
 - ii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^4 - x = 0$
 - iii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^2 = x$ (On rappelle que comme conséquence, d'après TD, A est commutatif)
- 5 On suppose que m divise 3
 - i. Montrer que $\forall x \in A \quad 5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2)$
 - ii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^4 + x = x^2 + x^3$
 - iii. En déduire que $\forall x \in A \quad 2x^4 = 2x^2$
 - iv. En déduire que $\forall x \in A \quad x^3 = x$ (On rappelle que comme conséquence, d'après la session de Juin 2008, A est commutatif)
- 6 On suppose que m divise 5, Soient $x, y \in A$, soit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 - i. En écrivant $(nx + y)^5 = nx + y$, déduire qu'il existe $A_1, A_2, A_3, A_4 \in A$ tel que
$$(*) \quad n^4 A_1 + n^3 A_2 + n^2 A_3 + n A_4 = 0$$
 - ii. Montrer que $A_1 = x^4 y + x^3 y x + x^2 y x^2 + x y x^3 + y x^4$
 - iii. Calculer $x A_1 - A_1 x$
 - iv. Montrer que $A_1 = 0$ (on pourra sommer la relation $(*)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$)
 - v. En déduire que A est commutatif
- 7 Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $nA = \{nx \mid x \in A\}$. On admet que $10A, 6A, 15A$ sont des anneaux pour les lois induites respectivement par $+$ et \cdot .
 - i. Montrer que $\text{Car}(10A)$ divise 3, $\text{Car}(6A)$ divise 5, $\text{Car}(15A)$ divise 2
 - ii. Montrer A est commutatif.

II Soit dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

- 1 Montrer que $\text{pgcd}(X^2 + X + 1, (X - 1)^2) = 1$
- 2 Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$U(X^2 + X + 1) + V(X - 1)^2 = 1$$

- 3 Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

III Soit K un corps commutatif. Soient $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice (m, n) , $B \in M_{p,q}(K)$ une matrice (p, q)

- 1 A quelle condition le produit AB est défini
- 2 A quelle condition les produit AB et BA sont définis
- 3 Pour une matrice carrée $C = (a_{ij})$, on appelle trace de A le scalaire $\text{tr}(C) = \sum_i a_{ii}$. Montrer que si AB et BA sont définis, alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

- 4 On suppose AB et BA définis. Montrer que si $I - AB$ est inversible, alors $I - BA$ est inversible. (I et I' matrices identité)(On cherchera son inverse sous la forme $I' + BXA$, X matrice à préciser)

IV Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 - 3x_3)$$

- 1 Montrer que f est linéaire.
- 2 Soient B_1, B_2 les bases canoniques respectivement de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 . Calculer $M_{B_1 B_2}(f)$
- 3 Pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^2$, écrire matriciellement la relation $f(v) = w$.
- 4 Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- 5 Donner une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.
- 6 Vérifier la relation liant $\dim(\text{Ker}(f))$ et $\dim(\text{Im}(f))$.