UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2009/2010
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2010

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^5+1}{X(X^2+1)^2}$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,1,-1),(1,0,1),(3,2,-1),(3,1,1))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.

III Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1 Montrer que $Im(f \circ f) \subset Im(f)$

2 Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f \circ f)$

On suppose que
$$E = Ker(f) + Im(f)$$

3 Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$

4 Soit $x \in Ker(f \circ f)$, montrer que $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$

5 En déduire que $Ker(f) = Ker(f \circ f)$

6 Montrer que $Im(f) = Im(f \circ f)$

7 Inversement si $Im(f) = Im(f \circ f)$ montrer que $E = Ker(f) + Im(f)$

IV Soit $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (2x+y+z, x+2y+z)$

1 Montrer que f est linéaire

2 Ecrire la matrice de f dans la bases (canoniques) $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $B' = ((1,0),(0,1))$

3 Soit $B_2 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$. Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$

4 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'

5 Donner la matrice de passage de B à B_2

6 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

V Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X-4)(X-1)^2$

2 Donner les valeurs propres de A

3 Donner les vecteurs propres de A

4 Justifier que A est diagonalisable.

5 Donner une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale tel que $P^{-1}AP = D$