

Session ordinaire du printemps 2011

<http://webservice.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$$

II On considère dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 le système :

$$\mathcal{S} = ((1, 2, 1), (-1, 0, 1), (2, 6, 4), (-1, 2, 3))$$

- 1 Donner le rang de \mathcal{S} (Justifier votre réponse)
- 2 Donner une base de $\text{vect}(\mathcal{S})$
- 3 Donner la décomposition des autres éléments de \mathcal{S} dans la base ci-dessus.

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K[X]$ formé des polynômes de degré ≤ 3

$$E = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in K\}$$

- 1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K[X]$
- 2 Montrer que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E

Soit

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow K^2 \\ P &\longrightarrow (P(0), P(1)) \end{aligned}$$

- 3 Montrer que f est linéaire.
- 4 Justifier que la matrice de f dans les bases $B = (1, X, X^2, X^3)$ et $B' = ((1, 0), (0, 1))$ est

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 5 Soit $P \in E$, donner au moyen de $M_{BB'}(f)$ l'écriture explicite de $f(P)$
- 6 Donner une base de $\ker(f)$
- 7 En déduire que si $P \in \ker(f)$ alors P est de la forme $X(X-1)(aX+b)$
- 8 Donner au moyen de $M_{BB'}(f)$, un générateur ensuite une base de $\text{Im}(f)$

- 9 Vérifier la formule liant $\dim(\ker(f))$ et $\dim(\text{Im}(f))$
- 10 Soit $B_2 = (1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$. Montrer que B_2 est une base de E
- 11 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'
- 12 Donner la matrice de passage de B à B_2
- 13 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

IV Soit dans $M_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^4$
 - 2 Donner les valeurs propres de A
 - 3 Donner les vecteurs propres de A
 - 4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).
- V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E . On suppose que

$$E = \ker(f) + \ker(g) \quad \text{et} \quad E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$

1 Montrer que

$$\dim(E) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) \quad (1)$$

et

$$\dim(E) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) \quad (2)$$

2 En déduire que

$$2\dim(E) \leq (\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))) + (\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))) \quad (3)$$

- 3 Montrer que (3) est une égalité
- 4 En déduire que (1) et (2) sont des égalités
- 5 Montrer que les sommes $\ker(f) + \ker(g)$ et $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ sont directes