

Session ordinaire du printemps 2009

<http://webservice.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III et IV sont indépendants

Solution

I Soit A un anneau. $m = \text{Car}(A)$ la caractéristique de A .

1 Montrer que $\forall x \in A \quad (x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

Réponse : $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$(x + 1)^3 = (x + 1)^2(x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$(x + 1)^4 = (x + 1)^3(x + 1) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$(x + 1)^5 = (x + 1)^4(x + 1) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \quad \square$

Autre Réponse :(Acceptable) Comme x et 1 commutent, le formule du binôme s'applique \square

Dans la suite, on suppose que A vérifie : $\forall x \in A \quad x^5 = x$

2 Montrer que $\forall x \in A \quad 30x = 0$ (remplacer x par $2x$)

Réponse : Remplaçons x par $2x$, il vient $(2x)^5 = 2x$, soit $32x^5 = 2x$, soit $32x = 2x$, soit $30x = 0 \quad \square$

3 Montrer que m divise 30

Réponse : $\forall x \in A \quad 30x = 0$, par définition de la caractéristique, cela entraine m divise 30 \square

4 On suppose que m divise 2

i. Montrer que $\forall x \in A \quad 5(x^4 - x) = 0$

Réponse : On a

$$(x+1)^5 = x+1 = x+1 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = x^5 + 5x^4 + 5x + 1$$

Car comme m divise 2, on a $\forall x \in A \quad 2x = 0$, donc $10x^3 = 0$ et $10x^2 = 0$

Donc

$$x + 1 = x^5 + 5x^4 + 5x + 1 = x + 5(x^4 + 1) + 1 \text{ donc } 5(x^4 + x) = 0$$

remplaçons x par $-x$ il vient $5(x^4 - x) = 0 \quad \square$

Autre Réponse : Appliquer directement la formule du binôme à

$$(x - 1)^5 \quad \square$$

ii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^4 - x = 0$

Réponse : On a

$$0 = 5(x^4 - x) = 4(x^4 - x) + (x^4 - x) = 0 + (x^4 - x) \quad \square$$

iii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^2 = x$ (On rappelle que comme conséquence, d'après TD, A est commutatif)

Réponse : On a $x^4 = x$, donc $x^5 = x^2$ soit $x^2 = x \quad \square$

5 On suppose que m divise 3

i. Montrer que $\forall x \in A \quad 5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2)$

Réponse : On a

$$x+1 = (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = x + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

donc

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x = 0$$

donc

$$5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2) \quad \square$$

ii. En déduire que $\forall x \in A \quad x^4 + x = x^2 + x^3$

Réponse : Comme m divise 3, on a $\forall x \in A \quad 3x = 0$, donc

$$5(x^4 + x) = (6 - 1)(x^4 + x) = 6(x^4 + x) - (x^4 + x) = 0 - (x^4 + x)$$

de même

$$-10(x^3 + x^2) = (-9 - 1)(x^3 + x^2) = 0 - (x^3 + x^2)$$

donc

$$-(x^4 + x) = -(x^3 + x^2)$$

donc

$$x^4 + x = x^3 + x^2 \quad \square$$

iii. En déduire que $\forall x \in A \quad 2x^4 = 2x^2$

Réponse : On a $\forall x \in A \quad x^4 + x = x^3 + x^2$, remplaçons x par $-x$ il vient aussi $\forall x \in A \quad x^4 - x = x^2 - x^3$, additionnant membre à membre les deux égalités, il vient :

$$\forall x \in A \quad 2x^4 = 2x^2 \quad \square$$

iv. En déduire que $\forall x \in A \quad x^3 = x$ (On rappelle que comme conséquence, d'après la session de Juin 2008, A est commutatif)

Réponse : Toujours parceque m divise 3, on a $2x^4 = (3 - 1)x^4 = -x^4$. De même $2x^2 = -x^2$, donc $-x^4 = -x^2$, donc $x^4 = x^2$, donc $x^5 = x^3$ donc $x^3 = x \quad \square$

6 On suppose que m divise 5, Soient $x, y \in A$, soit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

i. En écrivant $(nx + y)^5 = nx + y$, déduire qu'il existent $A_1, A_2, A_3, A_4 \in A$ tel que

$$(*) \quad n^4 A_1 + n^3 A_2 + n^2 A_3 + n A_4 = 0$$

Réponse : Tenant compte que x, y ne commutent pas nécessairement , on a

$$(nx + y)^5 = (nx + y)(nx + y)^2(nx + y)^2$$

soit

$$(nx + y)^5 = (nx + y)(n^2x^2 + n(xy + yx) + y^2)(n^2x^2 + n(xy + yx) + y^2)$$

soit

$$(nx + y)^5 = n^5x^5 + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y^5$$

$$A_1 = x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4$$

$$A_2 = x^3y^2 + x^2y^2x + xy^2x^2 + y^2x^3 + x^2yxy + xyx^2y + yx^3y + yxyx^2 + xyxyx + yx^2yx$$

$$A_3 = y^3x^2 + y^2x^2y + yx^2y^2 + x^2y^3 + y^2xyx + yxy^2x + xy^3x + xyxy^2 + yxyxy + xy^2xy$$

$$A_4 = y^4x + y^3xy + y^2xy^2 + yxy^3 + xy^4$$

On a donc

$$nx + y = (nx + y)^5 = n^5x^5 + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y^5$$

$$= nx + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y$$

car $n^5x^5 = (nx)^5 = nx$, donc

$$n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 = 0 \quad \square$$

ii. Montrer que $A_1 = x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4$

iii. Calculer $xA_1 - A_1x$

Réponse :

$$xA_1 - A_1x = x(x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4) - (x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4)x$$

$$= xy - yx \quad \square$$

iv. Montrer que $A_1 = 0$ (on pourra sommer la relation (*) pour $n = 1, 2, 3, 4$)

Réponse : Avec $n = 1, 2, 3, 4$ il vient :

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$$16A_1 + 8A_2 + 4A_3 + 2A_4 = 0 \quad \text{soit} \quad A_1 + 3A_2 + 4A_3 + 2A_4 = 0$$

$$81A_1 + 27A_2 + 9A_3 + 3A_4 = 0 \quad \text{soit} \quad A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 3A_4 = 0$$

$$256A_1 + 64A_2 + 16A_3 + 4A_4 = 0 \quad \text{soit} \quad A_1 + 4A_2 + A_3 + 4A_4 = 0$$

Additionnant les quatre égalités, il vient $4A_1 = 0$, soit $-A_1 = 0$, donc $A_1 = 0$ \square

v. En déduire que A est commutatif

Réponse : $0 = xA_1 - A_1x = xy - yx$ \square

7 Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $nA = \{nx \mid x \in A\}$. On a admet que $10A, 6A, 15A$ sont des anneaux pour les lois induit respectivement par $+$ et \cdot .

i. Montrer que $\text{Car}(10A)$ divise 3, $\text{Car}(6A)$ divise 5, $\text{Car}(15A)$ divise 2

Réponse : On a $3(10A) = 30A = \{0\}$, donc $\text{Car}(10A)$ divise 3 \square

ii. Montrer A est commutatif.

Réponse : D'après 6,5 et 4 on a $6A, 10A$ et $15A$ commutatifs, donc $\forall x, y \in A$, on a

$$6x6y = 6y6x \quad (1)$$

$$10x10y = 10y10x \quad (2)$$

$$15x15y = 15y15x \quad (3)$$

On a $\text{pgcd}(6, 10, 15) = 1$, donc $\text{pgcd}(6^2, 10^2, 15^2) = 1$, donc il existe $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$u6^2 + v10^2 + w15^2 = 1$$

Formons $u(1) + v(2) + w(3)$, il vient

$$xy = yx \quad \square$$

II Soit dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

1 Montrer que $\text{pgcd}(X^2 + X + 1, (X - 1)^2) = 1$

Réponse :

$X^2 + X + 1$	$X^2 - 2X + 1$	$3X$
$X^2 - 2X + 1$	1	$X/3 - 2/3$
$3X$	X^2	
	$-2X + 1$	
	$-2X$	
	$1 \neq 0$	

Donc $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X - 2$ sont premiers entre eux. \square

2 Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$U(X^2 + X + 1) + V(X - 1)^2 = 1$$

Réponse : Posons $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^2 - 2X + 1$, on a donc

$$A = B + 3X$$

$$B = (3X)(X/3 - 2/3) + 1$$

Donc

$$B = (A - B)(X/3 - 2/3) + 1$$

Donc

$$(X/3 + 1/3)B - A(X/3 - 2/3) = 1$$

On peut aussi permuter les rôles de A et B , cela donne

$X^2 - 2X + 1$	$X^2 + X + 1$	$-3X$
$X^2 + X + 1$	1	$-X/3 - 1/3$
$-3X$	X^2	
	$X + 1$	
	X	
	$1 \neq 0$	

Donc $B = A - 3X$ et $A = (-3X)(-X/3 - 1/3) + 1$ d'où on tire la même relation

$$(X/3 + 1/3)B - A(X/3 - 2/3) = 1 \quad \square$$

3 Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Réponse :

Multiplions cette relation par X^4 et divisons par AB il vient

$$F = \frac{X^4(X + 1)}{3(X^2 + X + 1)} - \frac{X^4(X - 2)}{3(X^2 - 2X + 1)}$$

4 Pour décomposer F en éléments simples, il suffit de décomposer chacune de ses composantes

$$\frac{X^4(X + 1)}{3(X^2 + X + 1)} \text{ et } \frac{X^4(X - 2)}{3(X^2 - 2X + 1)}$$

et soustraire les deux résultats.

- Décomposition de $\frac{X^4(X + 1)}{3(X^2 + X + 1)}$

On calcul le quotient de la division euclidienne de

$$X^4(X + 1)/3 \text{ par } X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
X^5 + X^4 & X^2 + X + 1 \\
X^5 + X^4 + X^3 & X^3 - X + 1 \\
\hline
-X^3 & \\
-X^3 - X^2 - X & \\
\hline
X^2 + X & \\
X^2 + X + 1 & \\
\hline
-1 &
\end{array}$$

Donc

$$X^5 + X^4 = (X^3 - X + 1)(X^2 + X + 1) - 1$$

Donc

$$(X^5 + X^4)/3 = (X^3 - X + 1)(X^2 + X + 1)/3 - 1/3$$

D'où la décomposition

$$\frac{X^4(X+1)}{3(X^2+X+1)} = (X^3 - X + 1)/3 - \frac{1}{3(X^2+X+1)}$$

- Décomposition de $\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$

On calcul le quotient de la division euclidienne de

$$X^4(X-2)/3 \text{ par } X^2 - 2X + 1$$

$$X^4(X-2)/3 = (X^2 - 2X + 1)(X^3 - X - 2)/3 + (-3X + 2)/3$$

et on a

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

Par suite la décomposition de $\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$ s'écrit

$$\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)} = (X^3 - X - 2)/3 + \frac{\alpha}{(X-1)^2} + \frac{\beta}{X-1}$$

$$\alpha = \frac{X^4(X-2)}{3}(1) = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} = \frac{X^5 - 2X^4 + 1}{3(X-1)^2} = \frac{X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{3(X-1)}$$

Donc

$$\frac{X^5 - 2X^4 + 1}{3(X-1)^2} = \frac{X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{3(X-1)} = (X^3 - X - 2)/3 + \frac{\beta}{X-1}$$

$$\beta = \frac{X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{3}(1) = -1$$

D'où la décomposition de F

$$F = 1 - \frac{1}{3(X^2 + X + 1)} + \frac{1}{3(X - 1)^2} + \frac{1}{X - 1}$$

On peut aussi décomposer directement F

$$F = Q + \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{\alpha}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{X - 1}$$

Q est le quotient de la division euclidienne de X^4 par $(X^2 + X + 1)(X^2 - 2X + 1) = X^4 + \dots$, soit $Q = 1$

On pose $h = X - 1$, alors

$$\frac{X^4}{X^2 + X + 1} = \frac{(1 + h)^4}{(1 + h)^2 + (1 + h) + 1} = \frac{1 + 4h + O(h^2)}{3 + 3h + O(h^2)} = \frac{1}{3} + h + O(h^2)$$

d'où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = 1$

Calcul de $aX + b$

- Méthode 1

On a

$$(X^2 + X + 1)F = \frac{X^4}{X^2 - 2X + 1}$$

On cherche U tel que

$$U(X^2 - 2X + 1) = 1 - V(X^2 + X + 1)$$

On a trouvé $U = -\frac{1}{3}(X + 1)$. Alors $aX + b$ est le reste de UX^4 par $X^2 + X + 1$

On trouve

$$aX + b = \text{reste de } X^4U \text{ par } X^2 + X + 1 = - - \frac{1}{3}$$

- Méthode 2 (Méthode par développement limité)

On pose $h = X^2 + X + 1$, on cherche un "développement limité" à l'ordre 1 de $X^4/(X^2 - X - 2)$ en h . On a

$$\frac{X^4}{X^2 - 2X + 1} = \frac{(h - X - 1)^2}{-3X + O(h)} = \frac{(X + 1)^2 + O(h)}{-3X + O(h)}$$

Soit

$$\frac{X^4}{X^2 - X - 2} = \frac{X + O(h)}{-3X + O(h)} = \frac{X(X + 1) + O(h)}{-3X(X + 1) + O(h)}$$

Soit

$$\frac{X^4}{X^2 - X - 2} = \frac{-1 + O(h)}{3 + O(h)} = -\frac{1}{3} + O(h)$$

Donc

$$aX + b = -\frac{1}{3}$$

Autre méthode de décomposition de F

$$F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)(X - 1)(X - 1)}$$

et on applique la formule du cours :

$$\frac{1}{(X - \alpha)(X^2 + aX + b)} = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} \left(\frac{1}{X - \alpha} - \frac{X + a + \alpha}{X^2 + aX + b} \right)$$

III Soit K un corps commutatif. Soient $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice (m, n) , $B \in M_{p,q}(K)$ une matrice (p, q)

1 A quelle condition le produit AB est défini

Réponse : $n = p$ \square

2 A quelle condition les produit AB et BA sont définis

Réponse : $n = p$ $q = m$ \square

3 Pour une matrice carrée $C = (a_{ij})$, on appelle trace de A le scalaire $tr(C) = \sum_i a_{ii}$. Montrer que si AB et BA sont définis, alors

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Réponse : Posons $AB = (c_{ij}) \in M_m(K)$ et $BA = (c'_{ij}) \in M_n(K)$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^m c_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^n c'_{kk} = tr(BA) \quad \square$$

- 4 On suppose AB et BA définis. Montrer que si $I - AB$ est inversible, alors $I' - BA$ est inversible. (I et I' matrices identité)(On cherchera son inverse sous la forme $I' + BXA$, X matrice à préciser)

Réponse : Soit X l'inverse de $I - AB$, on a

$$\begin{aligned}(I' - BA)(I' + BXA) &= I' - BA + BXA - BABXA = I' + B(-I + X - ABX)A \\ &= I' + B(-I + (I - AB)X)A = I'\end{aligned}$$

De même

$$(I' + BXA)(I' - BA) = I' \quad \square$$

IV Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 - 3x_3)$$

- 1 Montrer que f est linéaire.
- 2 Soient B_1, B_2 les bases canoniques respectivement de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 . Calculer $M_{B_1 B_2}(f)$

Réponse :

$$M_{B_1 B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \square$$

- 3 Pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^2$, écrire matriciellement la relation $f(v) = w$.

Réponse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

- 4 Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.

Réponse :

$$\text{ker}(f) = \left\{ \left(\frac{7}{3}x_3, \frac{-2}{3}x_3, 1 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (7, -2, 3) \rangle$$

$$= \left\{ \left(\frac{-7}{2}x_2, x_2, \frac{-3}{2}x_2, 1 \right) \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-7, 2, -3) \rangle$$

$$= \left\{ \left(x_1, -\frac{2}{7}x_1, \frac{3}{7}x_1 \right) \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (7, -2, 3) \rangle \quad \square$$

5 Donner une base et la dimension de $Im(f)$.

Réponse :

$$Im(f) = \langle (1, 1), (2, -1), (-1, -3) \rangle = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle = \langle (-1, -1), (2, -1) \rangle \quad \square$$

6 Vérifier la relation liant $dim(Ker(f))$ et $dim(Im(f))$.

Réponse : $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = 2 + 1 = 3 = dim(E) \quad \square$